談天説曆

曆法術數，息息相關，
不懂曆法，學術數難。
本書從天文入手，
上下古今中西，
陽曆農曆甲曆，
務求深入，兼顧淺出。
書中涉及天文科學，
須臚列高深算式以示推演，
惟不懂算，不要緊，
能明曆法來龍去脈，
學術數事半功倍便可。

作者趙子澤，醉心術數，重新註釋《沈氏玄空學》時，深感曆法乃術數之根基，遂坐言起行，著成數萬言大作，縱談中西今古天文曆法，俾術數愛好者一新耳目。書中資料翔實，數理深刻，如此談曆法，可謂前無古人，獨樹一幟，在洋洋術數書海中，無出其右。

出版人 趙善琪


ISBN 978-962-436-571-9 HK$80
9 789624 365719
Published and printed in Hong Kong

名家薈聚 賢才並舉

趙子澤 術數叢書 談天説曆 賢館

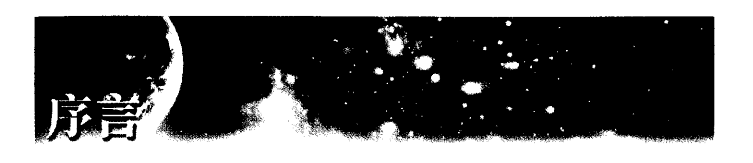
談天説曆

趙子澤

術數叢書

賢館文化有限公司出版


目錄



隨手翻起一本中國民間通俗日曆，不但可查出當天的公曆日期，還可以查看相對應的農曆／陰曆日期。民間流行的《通書》（俗稱《通勝》），還帶有吉、凶、宜、忌等事項，以作爲日常生活活動的指引。一頁日曆就已經帶有那麼多的資訊，究竟這些資訊是怎樣得來的呢？它們之間和曆法又有怎麼樣的關係呢？在沒有用科學的態度去探索玄學命理以前，總覺得日曆是理所當然的；那怕是在開始探索玄學命理以後，要想找出某年、某月、某日、以及某時的天干和地支，也就可以從萬年曆中找到。也就是說，壓根兒沒有去想：曆法究竟是怎麼樣的一回事，它對玄學命理又有怎麼樣的影響。一直到了老是查萬年曆而感覺的不方便的時候，才去想究竟有什麼簡便的方法可以直接推算。就這樣誤打誤撞地進入了另一個奧妙的殿堂。

原來一部曆法的編制，所涉及的範圍遠比我們想像的大：從對天象的觀測，觀測用天文儀器的製造工藝、計算的技術，到代表一個民族的哲學思維等學科，都牽涉在曆

法編制當中；更不用說利用曆法來宣示統治的權力和進行利慾薰心的政治鬥爭，可以大膽地說，一部新的曆法，本身就是一場革命。中國歷朝有記載的曆法超過一百多部，但行用過的曆法只有 65 部，大部分都不是順利頒行的，而是須要經過一番較量，才能獲得最後通過；未被採納的，也只好擱之高樓，歎一句懷才莫遇。

年少時與同窗好友一起夜觀星空，只單純地爲了興趣，希望能在茫茫星際中尋找出不同星座的位置及聯想著一個一個的希臘神話故事，但從來沒想到原來星空與曆法有著息息相關的關係。現今的玄學顧問，特別是星占家，試問又怎能不對曆法有一點瞭解呢？所以，我總覺得喜歡研究玄學的人，不多不少的要懂一點曆法，這也許是我的固執，就好像現在的計算機已經很先進，計算軟件的功能也很強，但總不能連加、減、乘、除這些基本運算都不懂。想學一門學問，最有效的辦法是求教他人，不然的話，也要翻看有關的書籍；但當我準備循著這兩條路徑前進的時候，才發現對玄學有認識的人不一定懂曆法，有的則標榜師門獨傳、祕而不宣，且坊間有關中國曆法的書目也不多。

曆法其實也是展示一個國家的科技水準，展示一個國家有沒有準確地預測天象的能力。科技方面莫如天文儀器的製造，如著名的渾天儀、簡儀、赤道經緯儀、黃道經緯儀等，無不巧奪天工。預測方面則有助於計算技術的發展，如中國剩餘定理、連分數的展開和漸近分數的演算、內插法的演算等，都是反映當時的計算水平。《易》學雖然是很艱澀、很乏味，但《易》最簡單的思想是「陰陽消長」，而這個「陰陽消長」的概念亦在曆法中體現無遺。

玄學所牽涉的範圍也挺廣泛，除了一些可以簡單地介紹以外，大都不能三言兩語地把問題說明，所以不能把所有玄學跟曆法的關係一一作出介紹。筆者僅希望通過《談天說曆》這一本書，讓有興趣研究玄學術數的朋友，也多一點瞭解曆法，說不定對研究玄學術數有所幫助。



從一些有關命理的書籍中看到過這樣的說法：軒轅黃帝「命羲和占日，常儀占月，大橈氏按五行創天干、地支、作六十甲子，蒼頡造文字，容成編撰曆書」；據《尙書・堯典》的記載：「乃命羲和，欽若昊天，曆象日月星辰，敬授民時」，其中「曆」指曆法（Calendrical Calculation），「日月星辰」當然指的是天文（Astronomy），「時」是指四時、時令。可見，天文與曆法有著密切的關係。通過對天象的觀測、計量，可預知四時寒暑的變化，從而計畫並指導當時社會特別是後來的農業社會的生產活動。無論是遠古的中國、抑或西方，人類抱著對上天的敬畏來從事天文觀測，往往衍生出像星占術（Astrology）等希望能預知未來的術數。

中國的術數，莫不與曆法息息相關。子平命理（八字）中如「甲午年丁丑月己卯日戊辰時乾造」，易占中如「丁丑年巳月甲寅旬丙辰日占」，六壬課中如「乙亥年戊寅月丁卯日丑時亥將占（戌亥空亡）」等，都是以曆法中

的干支紀年、紀日（即俗稱「甲子曆」）來表達時間。堪輿（風水）表面上看起來好像跟曆法無關，但堪輿中的擇日亦以太陽在何節氣、到何山向來定吉凶。太陽的位置在曆法中扮演著一個重要的角色。宮庭祕技的古三式（太乙、六壬、奇門）跟曆法更是有關，其中的太乙術甚至有它自己的一套曆法，稱爲「太乙曆」，但自元代「太乙統宗寶鑒曆」以後，未有發現新的太乙曆。

由此可見，研究玄學命理，就必須要懂得如何去查萬年曆。由於中國的曆法不完全是陰曆，而且很大的程度是以太陽的位置爲依歸（即所謂陽曆），在紀年、紀日方面又有中國特有的一套干支紀年、紀日法，所以導致初學者在查萬年曆的時候，往往會查錯。假如明白中國陰陽曆結構的話，那就不會出現查錯萬年曆的問題。

中國的曆法從古到今，一直不斷的演變，中間還經歷過幾次重大的改革，改革的原因不單是在於改朝換代，而在於需要更精確地反映天象的變化。其實，瞭解天象亦是皇權的一種表達，要是不能預知並解釋如日、月蝕、五星交會等天象所代表的吉凶的話，皇帝又怎能自稱天子——玉帝之子，而中國又怎能自稱天朝，奉天承運，以懾諸邦

呢？所以，自古以來都是禁止民間私行編制曆法，違者抄斬；編曆的工作只落在太史局、欽天監等朝庭專門部門，亦只有在這些部門中的可造之材，才能有機會在曆法和古三式等領域中研習。歷朝以來，中國的曆書都是作爲對朝貢藩籬回贈的禮品之一，遠涉高麗、安南，以致琉球等國。

在眾多中國曆法當中，尤以元代王恂（公元 [①]1235 – 1281）、郭守敬（1231 – 1316CE）在 1280CE編制《授時曆》時所採用的數學模型及其準確度領先世界各國，成爲中國曆法中使用得最長久的一套曆法，跨越三百六十年之久，最後才在 1645CE明朝的一次重大曆法改革中，給徐光啓（1562 – 1633CE）所編的《時憲曆》所取代。隨著曆法的發展，中國的數學亦有驕人的成就，如著名的中國剩餘定理（Chinese Remainder Theorem）、內插法（Interpolation）、連分數（Continued Fraction）展開式的漸近分數演算法、以及重差術和日高術的演算等等，都是爲了編制精確曆法而發展出來的一些數學理論。在中國，公曆始用於 1912CE，時值中華民國成立第二年，故以「民國」二字作爲年號（Name of Reign），並稱 1911CE 爲「民國元年」，1949CE中國國民黨退守臺灣，至今一直

沿用「民國」這個年號。1949CE中華人民共和國成立後，才廢除年號，完全使用公曆。

歐洲的曆法在過去兩千多年中亦有很多的變化。在 46BCE 羅馬帝國（Roman Empire）盛世時，凱撒大帝（Julius Caesar）聽取了天文學家索西琴尼（Sosigenes）的建議，頒佈了以自己名字命名的儒略曆（Julian Calendar）。從此以後，羅馬帝國的歷史才有了清楚的時間記載。由於有誤差，而且誤差每 128 年累積達一天之久，以至春分點（vernal equinox）的日期續年後移。到 1582CE 時，誤差接近兩周之多，以致無法確定西方復活節（Easter）的日期，致使羅馬教廷無法忍受，遂於 1582BCE 以當時天主教教宗格里歌利十三（Pope Gregorius XIII）名字命名並在天主教國家頒佈了格里曆（Gregorian Calendar）。格里曆就是現在所稱的公曆，廣爲世界各國採納。其後，歐洲的曆法在明、清時期隨著耶穌會傳教士（Jesuit missionaries）到中國傳教而流入，成爲清朝曆法改革的重要依據，並使得中國的曆法慢慢地與世界的曆法接軌。

隨著天文科學的發展，我們對太陽系、甚至整個宇宙的認識都不斷在加深。天體的運動是一個不規則的運動。由於這種不規則性，使得我們要對根據以前天文科學認識而制定的曆法經常作出修正，而且這種修改還要不斷地進行。現代曆法的計算，更是須要精密的儀器，通過觀測、建立數學模型、預測、再觀測、修正這個重複的程序，才能保持曆法的準確性。今天職業玄學顧問手中拿著的一本曆書，或從師門裏傳授而來的一套祕而不宣的曆法計算，終有一天會變成「老皇曆」[2]。

現時坊間看到的萬年曆，都是以南京紫金山天文臺所編制的年曆為依歸，原因是南京紫金山天文臺早在 1929CE（民國 18 年）已經是中國法定的曆法編制機關，也就是說相當於古時欽天監（即是御用天文台 Imperial Observatory）的地位。他們採用計算太陽和月亮位置的最新方法，重新推算了合朔（New Moon）和二十四節氣（Solar Segments）的交接時間，並規定以東經120° 標準時為準。筆者手上的一本《大眾萬年曆 1901 - 2100 年》是南京紫金山天文臺編制，上海科學技術出版社出版的第三版（1998CE，1991CE 第一版），由於考慮到曆書使用的持續性，該書對於 1949CE 前的節令，仍然按照他們在

1979CE 編制的《新編萬年曆》，所以在某些合朔和節氣上會有一天的差異。事實上，相差可能只是幾分幾秒，但一旦跨過晚上十一時（子時），就只能算是第二天，所以在使用萬年曆的時候，也應當清楚瞭解該年曆的結構，特別是其中一些貌似微不足道的地方，亦應注意，以免影響命理吉凶的推算。

當然，南京紫金山天文臺所編制的萬年曆中並沒有帶有玄學色彩；相反，坊間所看到的都不多不少的滲入了玄學命理的色彩。筆者看到過有一本加入了密宗星占色彩的萬年曆，但曆法仍是中土的曆法，並不是西藏的曆法，須知藏曆跟中土的曆法是有一定的差異；亦看到有融入了八宅風水概念的萬年曆，以及帶有年、月、日紫白飛星的萬年曆等等，目的都是希望本門所操用的一套理論能在曆書中反映出來，這樣一來，便可把相關的玄學理論在查萬年曆的時候一起查出來。

本書分六章。除了第一章「概論」外，第二章是「天文學的基本知識」，筆者盡可能地覆蓋跟玄學、曆法有關的天文知識；第三章是「中國曆法演算的數學依據」，有高級數學根基的讀者也許會看得比較輕鬆；第四章和第五

章分別是「中國曆法朔源」和「歐洲近代曆法的發展」，主要是介紹幾部有代表性的曆法來說明曆法演變的過程；「玄學中曆法的應用」則放在第六章，作爲全書的總結。

---

① 公元：即拉丁文 Anno Domini，A.D.（有只作 AD）爲簡寫。與之相對的是公元前，英文是 Before Christ， B.C. （有只作 BC）爲簡寫。以耶穌基督（Jesus Christ）的出生年作爲分野。爲了保持宗教的中性（deity-neutral），近代天文學家都採用 CE（Common Era, C.E.）和 BCE（Before Common Era, B.C.E.）來分別代替 AD 和 BC 。對中國人來說，公元已經變中性的了。習慣上，AD 寫在年數的前面，而 BC 寫在年數的後面，但 CE 和 BCE 則沒有明確的規定。公曆 1BC 到 AD1，中間是沒有 0 年，即 1BC 最後一天的第二天便是 AD1 的第一天，所以 2000 年世紀年（Millennium）的開始應該是在 2000CE 的除夕。

② 老皇曆：民間的俚語，意謂守舊、一成不變。實指 1908CE 清朝最後一位皇帝溥儀登基時所頒佈的年曆（1908 – 2108CE）。在 1978CE 前，香港和臺灣都沿用這一套年曆，由於當時按北京東經 116˚25'（116˚25'E）作爲計算，及後來編曆的工作轉落在南京紫金山天文臺，並以東經 120˚作爲北京標準時，以致在 1979CE 出版的《新編萬年曆》與「老皇曆」有大概 14 分鐘的差異。「老皇曆」估計應該是清「癸卯元曆」的延續。



既然曆法是基於天文的觀測，在討論曆法跟玄學的關係前，讓我們先回顧一下基本的天文學。「基本」的意思是只跟中國曆法有關的天文知識。

天球

天球（Celestial Sphere）是研究天體（Celestial Body）用的一個假想球體，天體則是宇宙間各種星體的統稱。根據選擇不同的中心點，可以有不同的天球，球體半徑可以是無限大。如果以地球為中心，稱為「地球天球」。假如觀察者站立在北半球（North Hemisphere）進行天體的觀察，不管他所在的緯度（Latitude）是多少，他頭頂的空間稱為天頂（Zenith），垂直於天頂跟球心的連綫而通過球心的平面為地平面（Horizon），地平面與天球相交的大圓稱為地平圈，它是地平坐標系的基圈。通過天頂

的任何大圓統稱為地平經圈，通過北天極（North Celestial Pole）的地平經圈稱為子午圈（Celestial Meridian）。子午圈與地平圈的交點為地平北點和地平南點。延伸地球赤道平面與天球所交的大圓稱為天赤度（Celestial Equator）。仰望星空之際，以為天體裏的所有的星體跟我們的距離一樣遠，實際上它們跟我們的距離比我們想像的遠，它們只不過是在天球上的投影。如圖 1 所示。

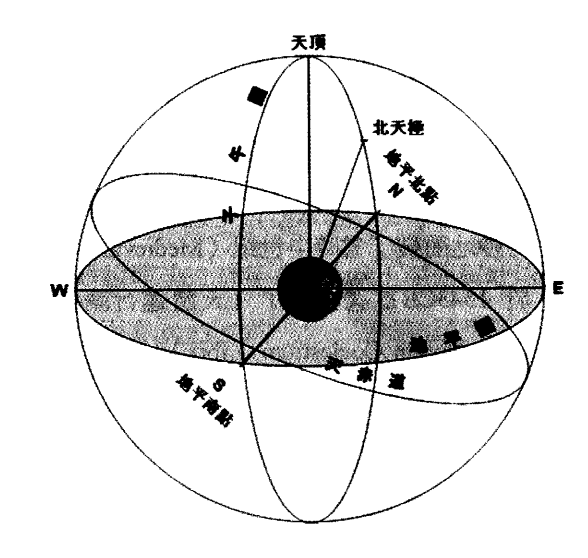


圖 1　　天球示意圖

地球的自轉與公轉

很早以前，人類就知道太陽及宇宙中的星體都是從東方升起來，在西方落下，於是就形成了以地球爲中心的宇宙概念。在古代中國，有蓋天 ①、渾天 ②等學說；在古希臘，托勒密（Claudius Ptolemaeus, ~ 100 – 170CE）總結了當時以喜帕恰斯（Hipparchus, 190 – 125BCE）爲主的成果而倡導的「地心學說」；都是認爲地球是宇宙的中心，太陽、行星、恒星 ③等都繞地球運轉。從上述的地球天球來說，一點都不難明白這種概念的成因。一直到十六世紀，波蘭的天文學家哥白尼（Nicolaus Copernicus, 1473 – 1543CE）巧妙地衝破了當時中世紀（Medieval）政教合一的封鎖，於 1543CE首次發表了《天體運行論》[1]（De Revolutionibus Orbium Coelestium, Libri VI），正式否定了地心學說，並第一次提出了「日心學說」，主張包括地球的行星及恒星都是繞太陽運轉，從而得到較準確的天文數據和較合理的天象變化的解釋。一點都不誇張，日心學說的提出，動搖了人類的宇宙觀，影響了世界歷史的進程。遺憾的是，當哥白尼拿到初版第一本書的時候，正值彌留

之際，無緣看到自己創立的學說得到確認及對後世的影響。

不難想像，假如地球繞太陽運轉而又要一天內有晝夜的話，那麼地球必定會繞自己的軸心旋轉，才會出現晝夜交替。天文學家發現地球在繞太陽逆時針公轉（Revolution）的同時，亦以逆時針方向自轉（Rotation），自轉的軸心稱爲南北極。由於觀察者在地球上作觀察，於是就稱太陽從一天的中午（觀察者的天頂）到下一天的中午爲一個太陽日（Solar Day），也是我們日常的一天；而公轉一周就叫一年。同時，也發現地球的自轉軸與垂直軸成 23.5°（2000CE 測得 23°438 611）的夾角，也就是說地球的赤度（Equator）平面與地球繞太陽公轉的軌跡平面亦成 23.5° 的夾角。這個軌跡平面與天球相交的大圓，稱爲黃道（Ecliptic），而地球的垂直軸亦可稱爲黃道軸，或簡稱黃軸。

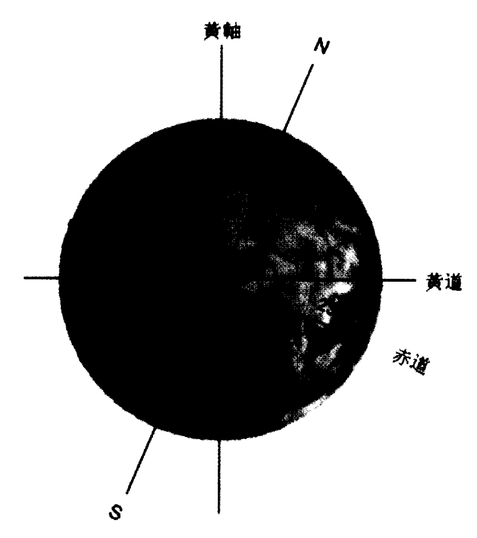


圖 2　　地球的自轉軸與黃軸成 23.5 度夾角

德國天文學家開普勒（Johannes Kepler, 1571 – 1630CE）在觀察火星（Mars）的圓周運動時發現跟當時的記載有 8' 的誤差，由於他堅持自己的觀察結果，從而發現火星沿橢圓軌道繞太陽運行 ， 太陽處於焦點之一的位置上；後來並發展成為著名的、影響後世天文學的開普勒三大定律。用他本人的說法：「就憑這 8' 差異，引起了天文學的全部革新。」

開普勒定律

著名的開普勒定律（Kepler's Law）分開三個部分：

<u>定律一：所有行星的運動軌道都是橢圓，太陽位於橢圓的一個焦點。</u>

以地球為例如圖 3 所示，地球繞太陽作橢圓軌道的運動，太陽在橢圓的其中一個焦點上。圖 3 是一個示意圖，事實上地球的軌道是近似圓型的橢圓，亦即是說偏心率 ④（Eccentricity）比較小，約 0.017 左右。由於軌道不是圓型，而太陽又在其中一個焦點上，軌道上總有一點離太陽最近，同樣亦有一點離太陽最遠，這兩點分別稱為近日點（Perihelion）和遠日點（Aphelion）。

<u>定律二：行星的向徑在相等時間內所掃過的面積相等。</u>

向徑是指太陽中心與行星中心的連綫。如圖 3 所示，在時間相等下，兩陰影部分的面積相等，因此行星在近日點附近比在遠日點附近移動的快一些。

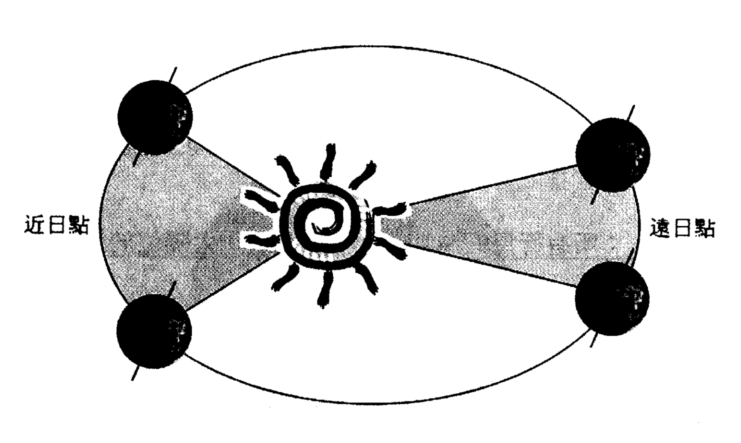


圖 3　　地球的橢圓軌道和近日點、遠日點

定律三：行星繞太陽運動公轉週期的平方與軌道半長徑的立方成正比。

如圖 4 所示。假如行星繞太陽運動公轉週期為 T，而行星繞太陽運動的橢圓軌道的半長徑為 a，則 $\frac{a^3}{T^2}$ = 常數。

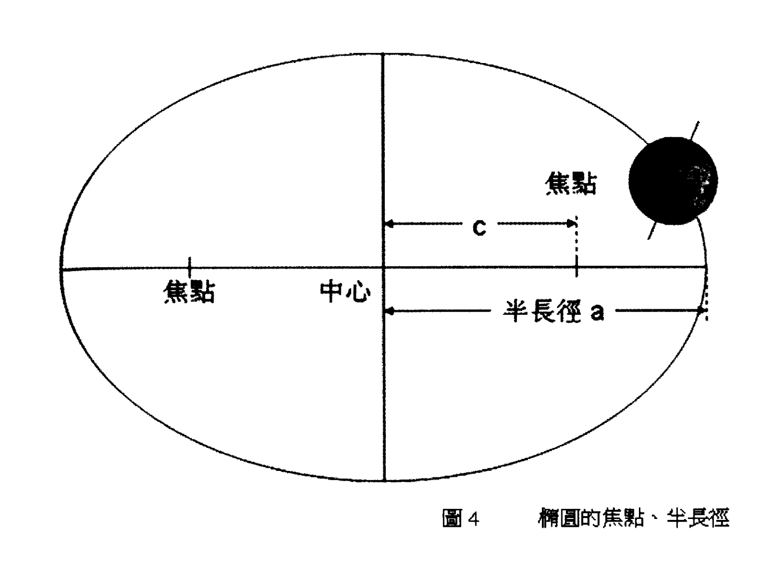


圖 4　　橢圓的焦點、半長徑

計時的方法

雖然現代天文學已經採用原子鐘作為計時（Chronometry）的工具，但在這一節中要討論的是古代天文學家怎樣以簡單的天象來計算時間。

在「地球的自轉與公轉」一節中，我們介紹了太陽日，即太陽連續兩次通過觀察者頭頂的時間，一般以子午

圈為標準。在天文學上，太陽有真太陽（True Sun）與平太陽（Mean Sun）之分。平太陽其實是天赤道上的一個假想點，按真太陽在黃道上運動的平均速度均勻運動。我們日常的一天就是平太陽連續兩次通過同一個子午圈所需的時間，稱為平太陽日，或泛稱太陽日（或簡稱日）。與之相對應的是真太陽日。

歐洲天文學家將太陽日平均劃分 24 等份，每一等份為一小時，每一小時有 60 分，每一分有 60 秒。現代民用的計時方法有 24 小時格式和 12 小時格式兩種，均以 *hh:mm:ss*（時：分：秒）來表示，其中 *hh* 和 *mm* 為整數，*ss* 為實數，$0 \le mm, ss < 60$。24 小時格式中 *hh* 之值為 $0 \le hh < 23$，中午（太陽在頭頂）為 12:00:00，午夜為 0:00:00。12 小時格式中 *hh* 之值則為 $0 \le hh < 12$，以 12:00:00 中午（noon）來區分上、下午，並在 *hh:mm:ss* 後面附以 a.m.（ante meridiem）或 p.m.（post meridiem）來分別表示上午或下午。從中午到下午一時以 12:*mm:ss* p.m. 表示，但晚上 11:59:59 p.m. 之後踏入 12:00:00 午夜（midnight）時則改為第二天 0:00:00 a.m.。無論是 24 小時格式或 12 小時格式，都是以午夜為新的一天的開始。

中國的古代計時方法有分不等時法和等時法。不等時法就是以「日出而作，日入而息」這個簡單的自然現象將一天不等時地劃分晝夜。在殷墟出土的甲骨文中可以看到對白晝各個不同時刻的專門名稱，如旦、大采、大食、中日、昃、小食、小采、莫（暮）、夕等。在夜間則有五更五點計時法，把一夜分作甲、乙、丙、丁、戊五段時間，稱為五夜（今稱五更），每更分為五點（或五唱、五籌），並以敲梆報時。按《漢舊儀》的記載：「**夜漏起，省中黃門持五夜，甲夜畢傳乙夜，乙夜畢傳丙夜，丙夜畢傳丁夜，丁夜畢傳戊夜，戊夜畢是為五更**」。漢、魏以來，五更是從黃昏到曉分之間的時間。据估计，甲夜應該是現代晚上 8:00 p.m. 左右，相當於十二時辰中的「戌」時。

等時法有「百刻法」和「十二支計時法」。百刻制將一天分為一百刻，但這個制度何時開始、何時結束已經無何稽查，東漢馬融注解《堯典》時說：「**古制刻漏晝長六十刻，夜短四十刻；晝短四十刻，夜長六十刻；晝中五十刻，夜亦五十刻**」。這裏說的古制應該是春秋戰國或更早的時期；「長」、「短」則是指晝、夜在一年四季中晝夜的長短。詳見下節「四季與二十四節氣」。

十二支計時法在西周時期（1 027 － 771BCE）開始，將一天（即一個太陽日）平均劃分爲 12 等份，以午夜前一小時（即 23:00:00 或 11:00 p.m.）作爲新的一天的開始，並以十二地支的名稱來記錄時間，稱爲「時辰」，或簡稱「時」。漢以後，天文學家將十二地支計時法跟百刻法配合使用，但沒有一定的方法。其後更有將一個時辰分 8 刻，一刻相當於現在的 15 分鐘，那麼一天就有 96 刻，接近 100 刻。

子爲十二地支之首，故以子時（即 11:00:00 p.m. 到 01:00:00 a.m.）爲一天之始。十二時辰中有「初」、「正」之別，但只是用來描述一個時辰的前半、或後半而已。從《易經》中陰陽消長的概念來說，「陰生於陽、陽長於陰」，子爲陰消陽長的時候，午則爲陽消陰長的時候，所以中國以子時作爲新一天的開始。西方的天文學傳入中國的時間很晚，由於中、西方對時間區間的劃分不一樣，有以 23:00 – 0:00 爲「夜子」，以 0:00 – 01:00 爲「早子」，其目的只是爲了清楚地說明時間而已。試想一想，西方一日 24 小時的概念傳入中國以前，無論在中國曆法計算或玄學命理的應用當中，都是以踏入「子」時爲第二天

的開始，所以在玄學命理亦應以此爲據，才符合《易經》的思想。

時辰	小時（*hh*: *mm*）	時辰	小時（*hh*: *mm*）
子	23:00 – 01:00	午	11:00 – 13:00
丑	01:00 – 03:00	未	13:00 – 15:00
寅	03:00 – 05:00	申	15:00 – 17:00
卯	05:00 – 07:00	酉	17:00 – 19:00
辰	07:00 – 09:00	戌	19:00 – 21:00
巳	09:00 – 11:00	亥	21:00 – 23:00

表 1　　中國十二時辰與 24 小時格式的時間對照（其中 *mm* 爲實數）

一般來說，「晝」是從卯時到申時，而「夜」則從酉時到寅時（見圖五）。六壬課中取日、夜貴人的辦法亦以卯、酉爲依歸；但六壬課取貴人的方法亦引起後人的一些討論和爭議。從上面百刻法中引述東漢馬融注解《堯典》的說明、及下面祖暅（南北朝時期傑出的數學家和天文學家祖冲之 ⑤之子）在《天文錄》中的記載，我們不難看得出爭議的原因。

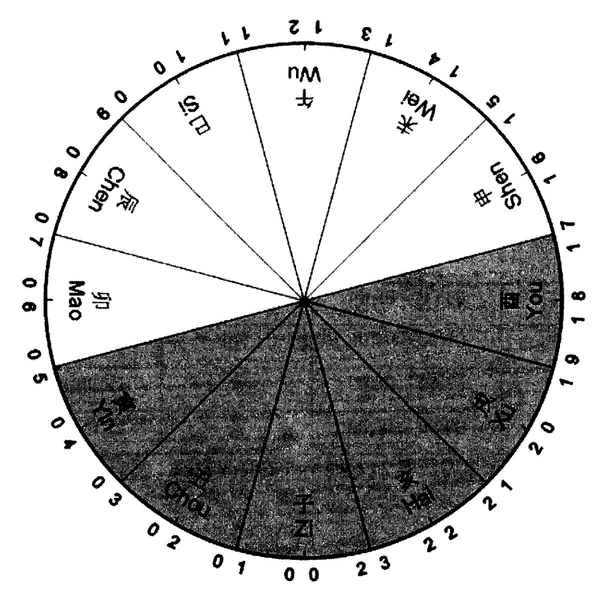


圖 5　　十二時辰與 24 小時格式的對應

祖暅在《天文錄》中說：「冬至之日，日出辰入申，晝行地上百四十六度強，夜行地下二百一十九度少弱，故晝短夜長也；夏至之日，日出寅入戌，晝行地上二百一十九度少弱，夜行地下一百四十六度強，故晝長夜短；春、秋分之日，日出卯入酉，晝行地上、夜行地下皆一百八十二度半強，晝夜長短同也」。其中的「度」是指周天日行一度的度，古時中國的周天不是按西方的 360°，而是 365 度餘；少強、少弱等則按下面表 2 的定義：

名稱	數值	名稱	數值	名稱	數值
	0	強	$\frac{1}{12}=\frac{0+\frac{1}{3}}{4}$	少弱	$\frac{2}{12}=\frac{0+\frac{2}{3}}{4}$
少	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$	少強	$\frac{4}{12}=\frac{1+\frac{1}{3}}{4}$	半弱	$\frac{5}{12}=\frac{1+\frac{2}{3}}{4}$
半	$\frac{6}{12}=\frac{2}{4}$	半強	$\frac{7}{12}=\frac{2+\frac{1}{3}}{4}$	太弱	$\frac{8}{12}=\frac{2+\frac{2}{3}}{4}$
太	$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$	太強	$\frac{10}{12}=\frac{3+\frac{1}{3}}{4}$	一辰弱	$\frac{11}{12}=\frac{3+\frac{2}{3}}{4}$

表 2　　中國數值中強、弱的定義

十二時辰是十二地支的一種應用。十二地支本來是用來表示地平方位，其中以子爲正北，卯爲正東，午爲正南，酉爲正西。「辰」跟星辰有關，在星空區分中有所謂「十二辰」，就是沿天赤道自東向西將周天等分十二個部分，亦用十二支的名稱來表示，以記錄太陽、行星及其他星體的時間和位置。當「星」宿南中天 [6]時，十二辰與地平方位中的十二支一一對應。

月亮的朔望

月有盈虧，人類很早就注意到月亮形狀的變化，因為月球是夜間星空最大和最容易看到的球體。月球是繞地球作逆時針方向運轉的天然衛星，它本身不發光，但可以反射太陽的光綫，我們看到的只是它發光的部分，稱為月相（Phases of the Moon）。我們可以把這部分叫作月亮。它的形狀會隨著月球所在軌道（稱為白道）的位置而變化，因而出現不同盈虧形狀的月相。當月亮僅僅可見的時候，稱為朔月（或俗稱新月 New Moon），當天則稱為朔日；當月亮最圓的時候，稱為望月（或俗稱滿月 Full Moon），當天則稱為望日。朔日是中國陰曆中陰曆月份開始的第一天，即所謂「初一」日；望日則在陰曆月份的第十五天，即所謂「十五」日；但望日在中國曆法上沒有朔日來得重要。見圖 6。

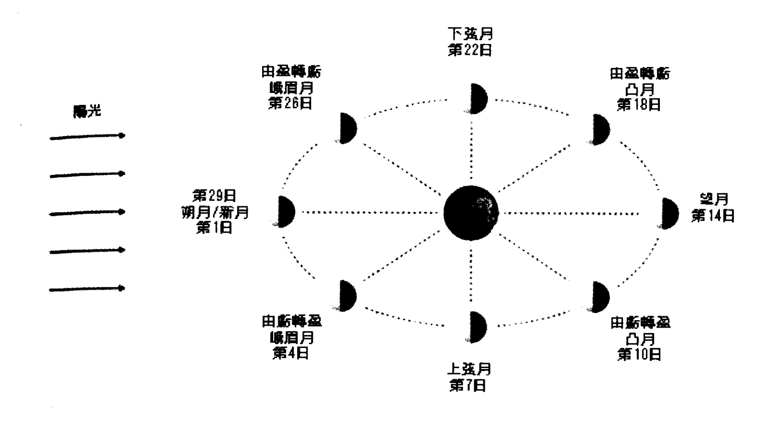


圖 6　　月相的變化

明顯地，當朔月時，月球的發光面正背著地球上的觀察者，故只能僅僅看到月球；當望月時，月球的發光面正對著地球上的觀察者，故能看見整個月球。這樣的一個朔望週期稱為一個朔望月（Synodical Month或Lunation），經計算，一個朔望月的平均值等於 29.530 59 日。由此可見，當朔、望日時，分別有機會出現日蝕 ⑦（Solar Eclipse）和月蝕（Lunar Eclipse）；但由於黃道和白道傾角有 5.14°（稱為黃白交角）的關係，並不是每個朔、望日都會有日蝕或月蝕，而是當月球的軌道接近黃白交點範圍

的時候，才會出現日蝕或月蝕，這個範圍稱爲蝕限（Eclipse Limit）。古時人類觀察月亮的時間最長，除了朔望月外，還發現以下各種不同月亮的週期，如：

分點月（或稱回歸月 Tropical Month）
恒星月（Sidereal Month）
近點月（Anomalistic Month）
交點月（Draconitic Month 或 Nodical Month）

分點月是月球黃經連續兩次通過春分點黃經所需的時間，約爲 27.321 58 日。恒星月是月球在天球上連續兩次通過某一恒星所需的時間，亦即是月球繞地球公轉的平均週期，約爲 27.321 66 日。

由於月球的軌道也是橢圓形的關係，於是有近地點（Perigee）和遠地點（Apogee）；近點月是月球連續兩次經過近地點所需的時間，約爲 27.554 55 日。由於黃白交角的關係，黃道和白道相交於兩點，當月球自軌道上升通過黃道的一點，稱爲升交點（或 Ascending Node ☊）；自軌道下降而通過黃道的另一點，稱爲降交點（Descending

Node ☋）；交點月是月球連續兩次通過升交（或降交）點所需的時間，約爲 27.212 2 日。

由於這些週期都是 27 日多，有學者認爲中國星空區分用的二十八宿 ⑧（The 28 Mansions）跟這些週期有關。詳見「星空的區分」一節。

近點月和交點月在中國曆法中有著重要的地位，它們是作爲校對曆法數據之用。有趣的是，在近代歐洲曆法中（包括儒略曆和格里曆）都沒有將這些月亮的週期用上。

四季與二十四節氣

人類觀察天象，很早就已經發現太陽、行星、恒星的時間和位置與季節有很密切的關係。他們把太陽從地平綫上升起的地方，稱爲東方；在地平綫上落下的地方，稱爲西方；當東、西方確定後，南、北兩方也能確定下來。這個簡單的地平方位就成爲了最基本的參考坐標。通過一段時間的觀察，很快就發現太陽並不是從地平綫上同一個位位置升起。以北半球而言，當天氣轉涼的時候，太陽從地

平綫上升起來的地方就漸漸地往南移動，到了某一點以後，天氣變得寒冷，與此同時發現晝極短而夜極長；之後，又漸漸地往北移動，天氣轉趨暖和，到了某一點，天氣反趨酷熱，用時亦晝極長夜極短。人類就以春（漸暖）、夏（極熱）、秋（漸涼）、冬（極寒）四季（Seasons）來形容這個週期性的天氣變化，而這樣的一個回歸性的週期，稱爲一個回歸年（Tropical Year）。

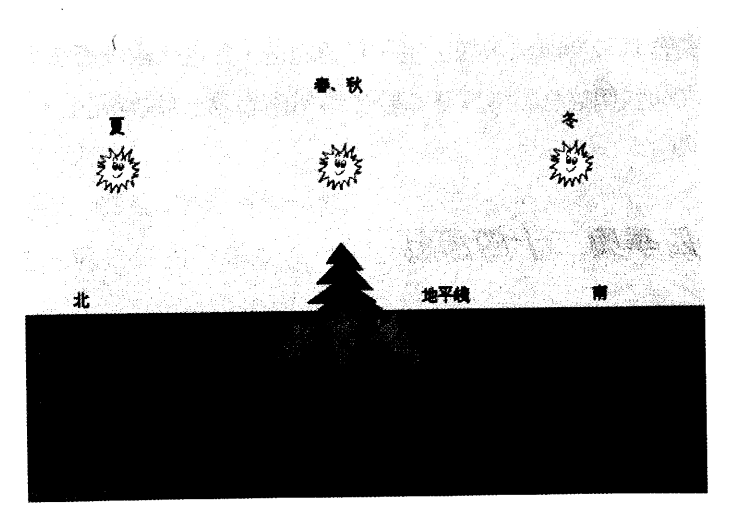


圖 7　　春夏秋冬日出示意图

有了這個四季的概念後，就稱太陽從地平綫升起來最南面的一點爲冬至（Winter Solstice）點，最北的一點爲夏至（Summer Solstice）點；在兩者中間的一點，則稱爲春分（Vernal Equinox）點和秋分（Autumnal Equinox）點。從現代天文學的角度來看，我們知道這是由於地球的傾斜度和繞太陽公轉的原因而造成的四季天氣的變化。

如圖 8 所示。由於地球對應與黃極作 23.5° 傾斜的原因，當地球在夏至點時，太陽光綫直射北緯 23.5°（23.5° Latitude North，23.5°N），北半球變得暖和且晝長夜短；相反，當地球在冬至點時，太陽光綫直射南緯 23.5°S，北半球就變得寒冷和晝短夜長；而當太陽光綫直射赤道時，太陽的位置分別在春分點和秋分點，這時候的晝和夜長度相等 ⑨。天文學家稱 23.5°N爲北回歸綫（Tropic of Cancer），稱 23.5°S爲南回歸綫（Tropic of Capricorn）。從黃道（太陽的軌道）和天赤道的概念來看，春、秋分點就是黃道和天赤道的兩個相距 180° 的交點，春分點爲升交點，秋分點爲降交點；而冬至和夏至點與兩分點成 90° 的距離。

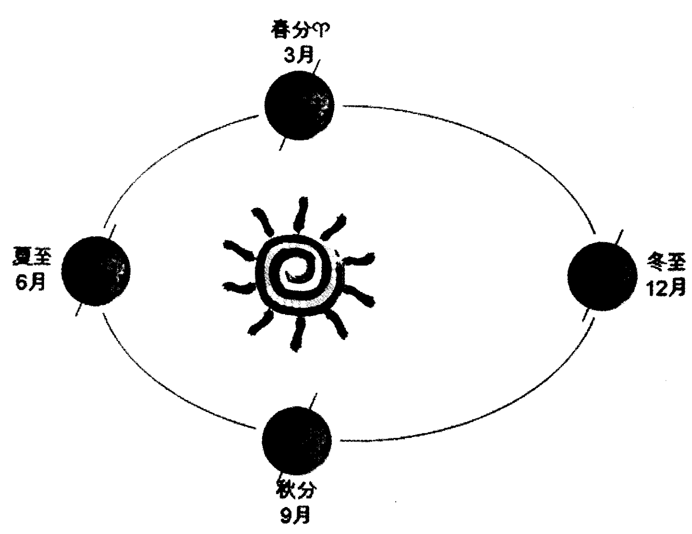


圖 8　　地球的公轉與四季

南、北回歸綫的英文名稱來自黃道十二宮（即西方星占術中的星座Zodiac Constellations）中的摩羯座（俗稱山羊座Capricornus ♑）和巨蟹座（Cancer ♋）。簡單來說，黃道帶是黃道兩側延伸各 8° 的一條帶，西方天文學家將黃道帶分爲十二個大致相等的區域，並將區域內的星體命名爲不同的星座，計有摩羯座、寶瓶座（俗稱水瓶座Aquarius ♒）、雙魚座（Pisces ♓）、白羊座（Aries ♈）、金牛座（Taurus ♉）、雙子座（Gemini ♊）、巨蟹

座、獅子座（Leo ♌）、室女座（俗稱處女座Virgo ♍）、天秤座（Libra ♎）、天蠍座（Scorpius ♏）、射手座（俗稱人馬座Sagittarius ♐）。各星座拉丁文名稱後面的符號是慣用的星座符號（Zodiac Signs）。黃道十二宮、太陽、月亮、及太陽系九大行星爲西方星占術廣泛採用。中國引入黃道十二宮的名稱應該是從自明朝開始，並將之與中國的二十八宿作對照。比方說，東方青龍（Eastern Azure Dragon）七宿中的「角」宿就以室女座 α（α Vir，Spica）作爲該宿的距星 ⑩，室女座 α 的中國古星名稱爲「角宿一」。詳見「星空的區分」一節。

由於分、至點的特殊性，中、外天文學家都用分、至點來計算一個回歸年的長度。嚴格來說，歐洲天文學家把太陽在天球上連續兩次通過春分點所需要的時間定爲一個回歸年，並計算得一個回歸年的平均值爲 365.242 20 太陽日，同時亦將太陽到達春分、夏至、秋分、冬至四點的時間分別定義爲春、夏、秋、冬四季的開始。由於春分時，太陽剛進入白羊座，故春分點亦以 ♈（白羊座）來表示；

用樣地，秋分點亦可以用 ♎（天秤座）來表示。冬至和夏至点則可分別用 ♑（摩羯座）和 ♋（巨蟹座）表示。

在中國，回歸年的計算跟歐洲類似，但中國以冬至點作爲參考點。從《易經》陰陽消長的概念來說，冬至爲陰盡陽長的時候，此時北斗七星（大熊座 Ursa Major）的斗柄正指著十二辰中的子方，稱爲「斗建子」。《易緯·稽覽圖》中有「甲子卦氣起中孚」一句，而「卦氣圖」中代表冬至的卦正好是中孚（上巽☴下兌☱，即風澤中孚）。甲爲天干之首，子爲地支之首，又爲一陽「復」始之始（「復」卦，上坤☷下震☳，即地雷復，以象陰盡陽長），冬至點作爲計算年長度的參考點可說是理所當然的了。古時有天、地、人三才之說，以子爲天，丑爲地，寅爲人，按時辰之初、正（前半、後半）來看，子月以大雪爲節、冬至爲氣（詳見下文），冬至爲子月之正（後半），故曆法家將冬至所在的十一月（子月）稱爲「天正冬至」。

既然西方的一個回歸年等於 365.242 20 太陽日，那麼中國的一個回歸年又有多長呢？根據《漢書·律曆志》及

《後漢書·律曆志》的記載，戰國時期的古六曆（黃帝曆、顓頊曆、夏曆、殷曆、周曆、魯曆）和東漢的《四分曆》，一直以 365¼太陽日爲一個回歸年的長度。《四分曆》的名稱來自一年中的四個分、至點。爲了更清楚、準確地反映天氣的變化，他們更將一個回歸年等分爲 24 節氣（Solar Segments），以這个平均值推算得来的氣稱爲平氣（Mean Sun）；以《四分曆》爲例，一個節氣平均爲 15.218 75 日。東漢乾象曆以後，回歸年的長度不是固定在 365.25 日，但平氣這個定義並沒有改變。

有趣的是，雖然計算回歸年的長度以冬至子夜開始，但中國在玄學命理上，新一年的開始卻定在二十四節氣中的立春，同時立春亦是春季的開始。那就是說，中國玄學命理是以太陽運動爲依歸，這一點跟西方星占術是相同的。由於等分的關係，二十四節氣中的立夏、立秋、和立冬分別是夏季、秋季、和冬季的開始，所以中國的四季比西方的四季早 45 日多。

讀者或者會問，在討論朔望月時，以初一爲一個月的開始，那麼一年中第一個月的第一天，應該是一年的開始，爲什麼立春不是初一日？原因是中國的二十四節氣是

反映太陽在一年中的赤經位置，而太陽不同時間在不同位置與地球的季節氣候有直接的關係，中國以農立國，在「秋收冬藏」後，又要開始新一年的農業生產活動，立春爲三陽啓「泰」[11]之始，故以立春爲春天的開始；踏入立春，才算是新一年寅月（即正月）的開始。相反，月亮的朔望與氣候沒有直接的關係。

茲將中國二十四節氣、月數、斗建、太陽位置、及黃道十二宮列於表 3。

月數	斗建	節氣	太陽赤經	黃道十二宮
一	寅	立春	315	♒ 寶瓶座
		雨水	330	♓ 雙魚座 Psc
二	卯	驚蟄	345	
		春分	0	♈ 白羊座 Ari
三	辰	清明	15	
		穀雨	30	♉ 金牛座 Tau
四	巳	立夏	45	
		小滿	60	♊ 雙子座 Gem
五	午	芒種	75	
		夏至	90	♋ 巨蟹座 Cnc
六	未	小暑	105	
		大暑	120	♌ 獅子座 Leo
七	申	立秋	135	
		處暑	150	♍ 室女座 Vir
八	酉	白露	165	
		秋分	180	♎ 天秤座 Lib
九	戌	寒露	195	
		霜降	210	♏ 天蠍座 Sco
十	亥	立冬	225	
		小雪	240	♐ 射手座 Sgr
十一	子	大雪	255	
		冬至	270	♑ 摩羯座 Cap
十二	丑	小寒	285	
		大寒	300	♒ Aqr

表 3　　中國二十四節氣、斗建、太陽位置與黃道十二宮

二十四節氣中立春、驚蟄、清明、立夏、芒種、小暑、立秋、白露、寒露、立冬、大雪及小寒稱爲節氣（或節 Segment Points）；其他的則稱爲中氣（或氣 Central

Points）。合稱亦叫作節氣。由於它清楚地說明一年中氣象的變化，以當時的農業社會來說，農民可以根據這些節氣來進行有關的農業生產活動。要注意的是，表 3 裏的月數並不等同於月份，月份（根據朔望月）是以初一朔日起算，而月數（第幾個月）則以節起算。嚴格地說，中國人每年正月初一（即每年第一個朔日）慶祝的新年實不能稱爲農曆新年，只能稱爲陰曆新年，因爲陰曆（朔望月）跟「農」業無關。中國玄學命理的推算都是以節氣起算。在節氣前，只能算上一個月，在節氣上或後，才算是本月；中氣則是太陽過宮的時間，在六壬課上有另一番應用。若將十二辰、二十四節氣及黃道十二宮放在一起，可得下圖：

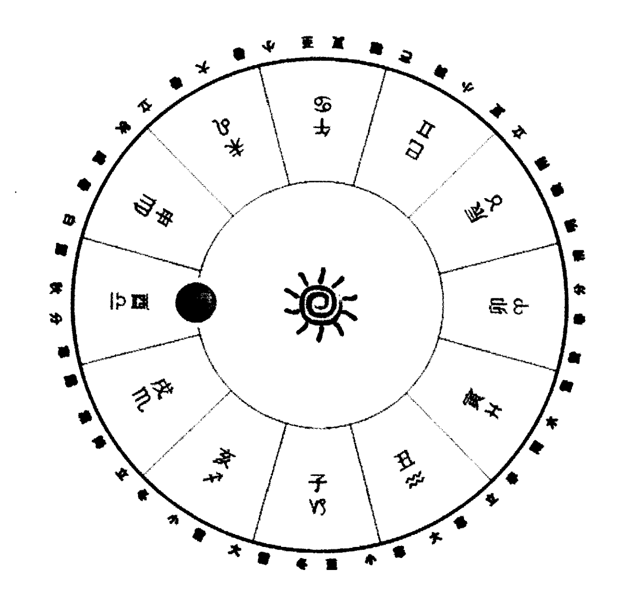


圖 9　　十二辰、二十四節氣、和黃道十二宮的對照

（♈爲春分的開始）

由於熾熱的太陽光綫的關係，在沒有儀器及工具的幫助下，古時人類沒法直接觀察太陽的位置，他們只能在日出點和日落點觀察最後落下和最初升起的恒星來判斷和計算太陽的位置。天文學家就把太陽連續兩次通過某一個恒星所需的時間叫作恒星年（Sidereal Year），亦即是地球繞太陽公轉的週期，並測得其長度爲 365.256 36 日。

此外，還有近點年和交點年，它們的定義類似近點月和交點月，分別用來研究太陽運動和日蝕的計算用，長度分別爲 365.259 64 日和 346.620 03 日。

表 3 中太陽的赤經（Right Ascension, 簡寫作 R.A.）在春分點（升交點） ♈ 時爲 0˚，隨著太陽位置逆時針方向移動，度數增加。英文 Ascension 是升起的意思，Right Ascension 是指在升交點（春分點）的右面（即黃道通過赤道上升，亦即逆時針方向）出現；意思是說某星體的赤經是指該星體所在位置與春分點在天赤道上逆時針方向之間的角距離（Angular Distance）。赤經除了可以用度數（指現代數學一圓周等於 360˚）來表示以外，還可以用時間來表示。以 24 小時計算，一小時是 15˚；假如太陽的赤經在 2005 年 7 月 25 日 17:15:00 爲 $R.A. = 8^h18^m54\dot{^s}9$，度數表示即 $124\dot{^\circ}728\ 75$，獅子座的赤經从 120˚ 开始，也就是說太陽已經進入獅子座了。

有一些星圖（Star Chart）用的是 S.H.A.（Sidereal Hour Angle）來表示恒星的位置，跟 R.A.相反，S.H.A. 是指該星體所在的位置與春分點在天赤道上順時針方向之間

的角距離。美國海軍天文臺（US Naval Observatory）所發佈的航海星圖（Navigational Star Chart）就是用 S.H.A. 來表示恒星的位置。

現在讓我們回個頭來看一看上面引述祖暅在《天文錄》中的那一段話。定時制中百刻制定一周天爲 T = 100 刻，祖沖之《大明曆》中的周天数是 14 424 664，纪元为 39 491，所以恒星年是 $t_s = \frac{14\,424\,664}{39\,491} = 365\frac{10\,449}{39\,491}$ 日，以日行一度算（中国古时一周天即一恒星年），冬至日晝行地上 146 度強（即 $t_w = 146\frac{1}{12}$ 度），通過下面的比例公式，便可以算出百刻制中晝漏 x 的刻數：

$$\frac{x}{T} = \frac{t_w}{t_s}$$

$$x = \frac{t_w}{t_s} \times T = \frac{146\frac{1}{12}}{365\frac{10\,449}{39\,491}} \times 100$$

$$x \approx 40$$

同理可計得夜漏 $y \approx 60$ ，所以古時稱冬至晝漏四十刻、夜漏六十刻，出現晝短夜長的現象。由此可見，兩至點的晝夜（或夜晝）的 6 : 4 分不是憑空捏造的。

中國的閏周

以回歸年的長度 365.242 20 日和朔望月 29.530 59 日爲例，由於回歸年不是朔望月的整倍數，一個回歸年比十二個朔望月多出了 10.875 12 日，也就是說從第二年開始，以後每一年的第一個朔日都會比新一年的第一天提前十多天到達。爲了使第一個朔日重新回到年的第一天，中國曆法家採取了置閏（Intercalation）的辦法，就是在若干年內增加若干個朔望月，使得它們總天數大致相等。所增加的朔望月叫閏月（Intercalary Month）。假如 t 是回歸年的長度，u 是朔望月的長度，則可以用下面的公式來表達這個關係：

$pu = qt$ 其中 p，q 均爲互素（有稱作質數 Prime Number）的正整數，即 $(p,q)=1$

式中 p 稱爲章月，q 稱爲章歲；而 p 和 q 的週期關係叫閏周（Intercalation Cycle），可以用 (p, q) 表示，$p - 12q$ 就是所需要增加的閏月。中國最古老的閏周是 11 年 4 閏，即是 11 年內增加 4 個閏月（共 136 個朔望月），所以 $(p,q)=(136,11)=1$ ，即 136 與 11 互爲素數。

$$\frac{p}{q} = \frac{t}{u} = \frac{136}{11}$$

按現在的回歸年和朔望月的長度來算，兩者之差超過計 1.5 日。

中國戰國時代的古六曆都是用 19 年 7 閏的閏周計算，當時的回歸年是 $t = 365\frac{1}{4} = \frac{1\,461}{4}$ 日，按 $pu = qt$ 計算，當時的朔望月等於

$$u = \frac{q}{p}t = \frac{19}{235} \times \frac{1\,461}{4} = \frac{27\,759}{940} = 29\frac{499}{940} \text{ 日}$$

這個朔望月的數值是一個導出數，並不是實測數。按現在的回歸年和朔望月長度來算，二者仍有 0.086 85 日的誤差。無獨有偶，這個 19 年 7 閏的閏周在公元前四世紀亦爲古希臘天文學家默冬（Meton）所發現，稱爲默冬章（Metonic Cycle）。正如曲安京指出 [5]，一直到公元四世紀後，中國曆法中的閏周才從上述的兩個閏周中演變出來，但也離不開下面的一個漸近分數的關係：

$$\frac{p}{q}=\frac{136+235m}{11+19m}$$

如祖沖之在《大明曆》中所使用的閏周爲 $\frac{p}{q}=\frac{136+235\times 20}{11+19\times 20}=\frac{4836}{391}=12\frac{144}{391}$，即 $m=20$，亦即 391 年中增加 144 個閏月。

歲差與章動

最早發現歲差（Presession）現象的是古希臘天文學家喜帕恰斯。大約在 130BCE，當在準備編制一本包含 1,022

顆恒星的星表（Ephemeris）時，他發現自己測出來的數據跟古數據中的黃經有較顯著的差異，幾乎所有恒星的黃經在 150 年間都增加了 1.5°，而黃緯則沒有明顯的變化。類似赤經的定義，黃經是天球上通過黃極與黃道垂直的大圓，亦以春分點作爲 0°（或 0^h），逆時針方向量度。某星體的黃經就是該星體在黃道上與春分點之間的角距離。由於這個原因，喜帕恰斯認爲春分點沿黃道後移（順時針方向），並推算出每 100 年順時針方向移動 1°。

中國第一個發現歲差的是晉代天文學家虞喜（281 – 356CE）。《宋史・律曆志》中有這麼的一段記載：「虞喜云：堯時冬至日短星昴，今二千七百餘年，乃東壁中，則知每歲漸差之所至」。這就是歲差這個名詞的來由。他是根據對冬至日恒星的中天（文中日短即指一日之中杆影最短時）觀測，發現歲差。其中「昴」、「壁」爲二十八宿中的昴宿和壁宿。從昴宿到壁宿，古度數周天相距的距離在 42 ~ 62 度之間（詳見「星空的區分」一節）。雖然虞喜於 320CE發現歲差，但一直到南北朝時期宋祖沖之在 463CE才將歲差引入《大明曆》的曆法計算中。按祖沖之歲差的演算法，每約 $45\frac{11}{12}$ 年的歲差 [12]（即恒星年與回歸年

之差）為 1 度，由此看來，上述的這段記載應該是準確的。

英國的物理學家、數學家、天文學家牛頓（Issac Newton, 1642 – 1727CE）第一個指出歲差的原因是太陽和月球對地球赤道附近隆起部分的引力作用，使得地球的自轉軸繞黃軸旋轉，繞行一周約 26 000 年。除了受太陽和月球的引力作用外，這個運動也會受到太陽系內其他行星引力作用的影響。這兩種影響分別稱為日月歲差和行星歲差，後者的影響遠比前者小。

英國天文學家布拉得雷（James Bradley, 1693 – 1762CE）在 1748CE 經過分析恒星數據後，得出一個新的發現：地球自轉軸繞黃軸旋轉的同時，還圍繞它的平均位置作週期為 18.618 年的運動，這個週期正好就是黃白升交點沿黃道逆時針方向繞行一周的時間，因月球引力的關係，地球自轉軸的運動亦作同週期的變化，這種現象稱為章動（Nutation）。由於受到歲差和章動的影響，使得地球的自轉軸繞著黃軸在天球上描繪出一條波狀曲綫。圖 10 是太陽、月球所引起歲差和章動的示意圖。

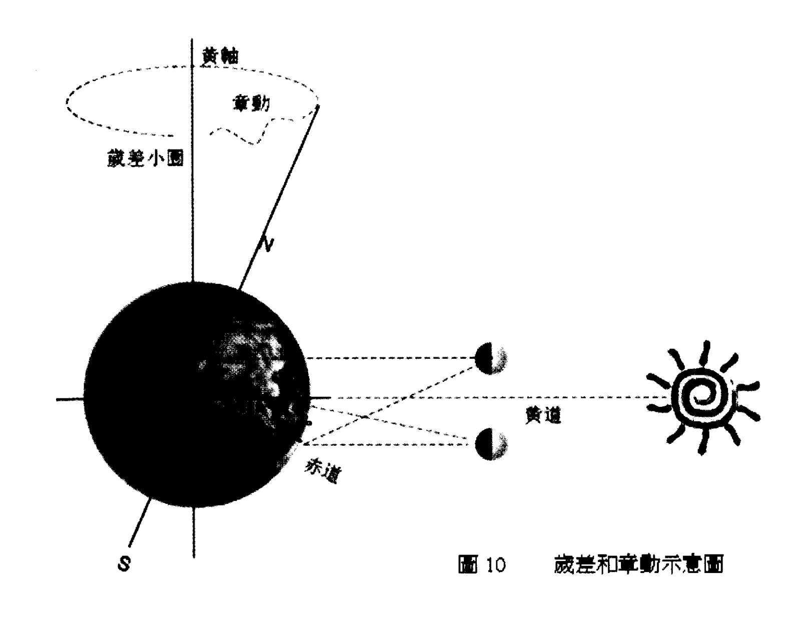


圖 10　　歲差和章動示意圖

星空的區分

在「計時的方法」和「四季與二十四節氣」兩節中，提到過十二辰和黃道十二宮，並引出二十八宿，這些都是古時人類為了方便觀測而把星空劃分成若干個區域。讓我們先看一看西方星空的劃分。

約 3000BCE，巴比倫人（Babylonian）將北半球（Northern Hemisphere）晚上星空較亮的星劃分成若干個星座，但比較接近現時星座的劃分則是在～200CE 由希臘的天文學家們所確定的。由於這些星座都是以希臘神話中的人物和動物名稱來命名，所以大都帶有動人的神話故事。南半球的星空一直到十七世紀（Century，即 1700CE）才被航海家陸續發現和確定。1928CE，國際天文學聯合會（International Astronomical Union, IAU）公佈了一個 88 個星座的方案，並規定以 1875CE 的春分點和赤道爲基準的赤經綫和赤緯綫，來標誌每個星座的位置。每個星座的大小、星數的多少都不一樣。黃道十二宮就是這 88 個星座中圍繞黃道帶的十二個星座。天上大部分肉眼能看見的星都有中文和外文名稱，如天琴座（Lyra）α（α Lyr）是織女星（Vega）等。一般以希臘字母 α 代表該星座的最亮的一顆星，β 爲第二亮星，γ 爲第三亮星，如此類推。茲列出希臘字母的總表如下。

字母	讀音	字母	讀音	字母	讀音
α	Alpha	ι	Iota	ρ	Rho
β	Beta	κ	Kappa	σ	Sigma
γ	Gamma	λ	Lambda	τ	Tau
δ	Delta	μ	Mu	υ	Upsilon
ε	Epilson	ν	Nu	φ	Phi
ζ	Zeta	ξ	Xi	χ	Chi
η	Eta	o	Omicron	ϕ	Psi
θ	Theta	π	Pi	ω	Omega

表 4　　希臘字母總表

下圖是 Han Kleinjn 所編寫的軟件 Hallo Northern Sky 的一個螢幕打印圖，其中黃色虛綫是黃道，藍色虛綫是星區。有興趣天文的讀者，不妨到他的網站下載。

http://www.hnsky.org/software.htm

圖 11　　Hallo Northern Sky 的一個螢幕打印圖

圖 11　　Hallo Northern Sky 的一個螢幕打印圖

中國星空的區分除了十二辰以外，還有十二次和三垣（The Three Enclosures）二十八宿。嚴格來說，十二辰和十二次只是空間的分割，並不包含其中的星體。十二辰是沿天赤道自東向西將周天等分爲十二個部分的統稱，用十二地支的名稱分別表示。十二辰跟斗建有關。

十二次則是把黃赤道帶自西向東劃分爲十二個部分的統稱，以便觀測「五緯」、「七曜」的位置和運動。什麼是五緯、七曜呢？五緯是太陽系五大行星金（Venus ♀）、木（Jupiter ♃）、水（Mercury ☿）、火（Mars ♂）、土（Saturn ♄）的統稱，又稱「五曜」；加上日（☉）、月（☽）便成爲七曜，又稱「七政」。中國星占家認爲木星屬東方，稱爲「歲星」；金星屬西方，稱爲「太白」；火星屬南方，稱爲「熒惑」；水星屬北方，稱爲「辰星」；土星屬中央；稱爲「鎮星」。又認爲歲星是吉星，它運行到某個星區（即十二次）時，與之相對的地面的地方就會五穀豐登；火星是災星，所到之處便會發生暴亂、瘟疫、饑荒、戰爭等災難；鎮星停留之處吉慶有福；太白爲兵象，順之者吉；辰星則隨它發光的顏色而變化，色白主旱災，色黃主五穀熟；色赤主兵戰等。

十二次的名稱分別是：星紀、玄（元）枵、娵訾、降婁、大樑、實沈、鶉首、鶉火、鶉尾、壽星、大火、析木。早在春秋戰國時代，《左傳》、《國語》就有十二次名稱的記載，一般是用來記述歲星的位置。歲星在中國古代被認爲有一個十二年的週期，歲星每一年到一「次」，所以叫十二次。事實上，木星繞太陽的公轉週期爲 11.86 年，這是後話。《國語》中有「**武王伐殷，歲在鶉火**」的記載，中國天文學家張鈺哲（1902 - ?CE）認爲周武王伐殷紂的時候應該是 1057BCE，而且那個時候歲星的確在鶉火之次。

按中國科學史家錢寶琮（1892 – 1974CE）的說法，十二次本來是跟二十八宿的四宮相對應，由於二十八宿的度數不均勻，所以十二次的赤經亦不均等；但後來卻發展到等分的制度，並與十二辰逆向對應。《漢書 · 律曆志》中的記載是十二次的起迄度數與二十四節氣相對應，以十二節氣爲起點，以十二中氣爲中點。如圖 12 所示。

明末引入黃道十二宮的名稱，將之與十二次相對應，如摩羯宮翻譯爲星紀宮，並將起點改在二十四節氣中的中

氣，如星紀宮的起點對應冬至點，亦即是圖 12 中十二次的位置順時針轉動了 15° 。假如十二次和十二辰只是空間的劃分這個立論正確的話，建立的當初應該有選定的參考點，而且應該是相對固定的，才能以此來觀測、記錄太陽系行星以及各恒星到達的時間和位置。那麼，爲什麼十二次的起迄點在變而十二辰不變？又或者會不會是明末翻譯時的苟且呢？又或者是十二辰和十二次之間一點關係都沒有？這都有待學者們去考證。

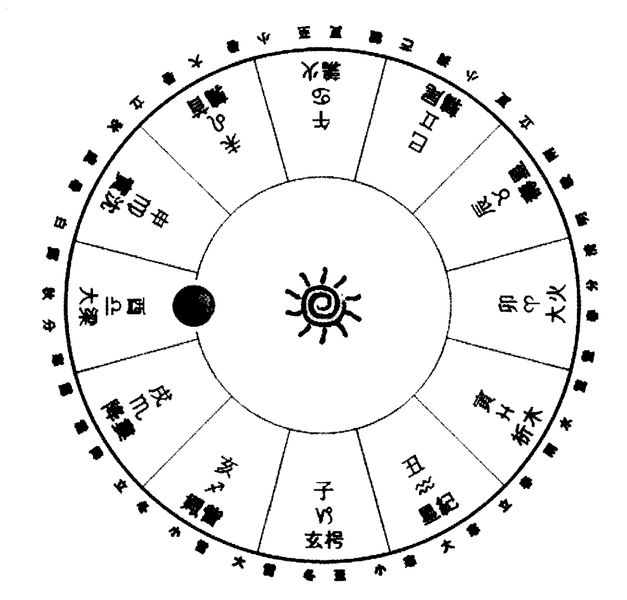


圖 12　　十二辰、十二次與黃道十二宮的對照（♈爲春分的開始）

三垣二十八宿

中國古代有關星表的記載有戰國時代魏國天文學家、星占家石申的《石氏星經》，此外甘德和巫咸二人亦有星表的著作。三國時，吳太史令陳卓將石、甘、巫三人的記載綜合成 283 星官和 1 464 星的星座體系。後來，才發展到三垣二十八宿。

三垣二十八宿比較完整的描述始見於唐王希明的《丹元子・步天歌》。它將星空劃分為 31 個天區，即三垣二十八宿，每一個天區的大小和區內的星數都不等，且每一個天區都由一個到多個「星官」組成，星官則由一個到多個恒星組成，類似西方的星座。按星官中文的意思可理解成為英文的Asterism。三垣 ⑬分：紫微垣（The Purple Palace Enclosure）、太微垣（The Supreme Palace Enclosure）和天市垣（The Heavenly Market Enclosure）。

紫微垣包括北極附近 36°N 以上的拱極星區，共有 31 個星官，覆蓋現代的小熊（Ursa Minor）、大熊（Ursa Major）、天龍（Draco）、仙王（Cepheus）、仙后

（Cassiopeia）、鹿豹（Cameleopardalis）等星座，詳見圖 13。在北半球，拱極星區為恒顯圈。

太微垣有 20 個星官，覆蓋現代的室女（Virgo）、獅子（Leo）、小獅（Leo Minor）、獵犬（Canes Venatici）、后髮（Coma Berenices）等星座。詳見圖 14。

天市垣有 19 個星官，覆蓋現代的武仙（Hercules）、天鷹（Aquila）、蛇夫（Ophiuchus）、巨蛇（Serpens）、牧夫（Bootes）、北冕（Corona Borealis）等星座。詳見圖 15。

太微垣北面在大熊座與紫微垣相接，西面在牧夫座及北冕座與天市垣相接。天市垣則在天龍座與紫微垣相接。讀者不妨可以想像一下，紫微垣是紫禁城，即皇帝居住的地方；太微垣是最高行政院；而天市垣是市集，即是做買賣、貿易的地方。假如你翻看著陳己雄所編寫的《中國古星圖》[4]，在茫茫無際的星空遨遊，聯想著書上的星官的名稱，也許會發現一個井井有條的國度。

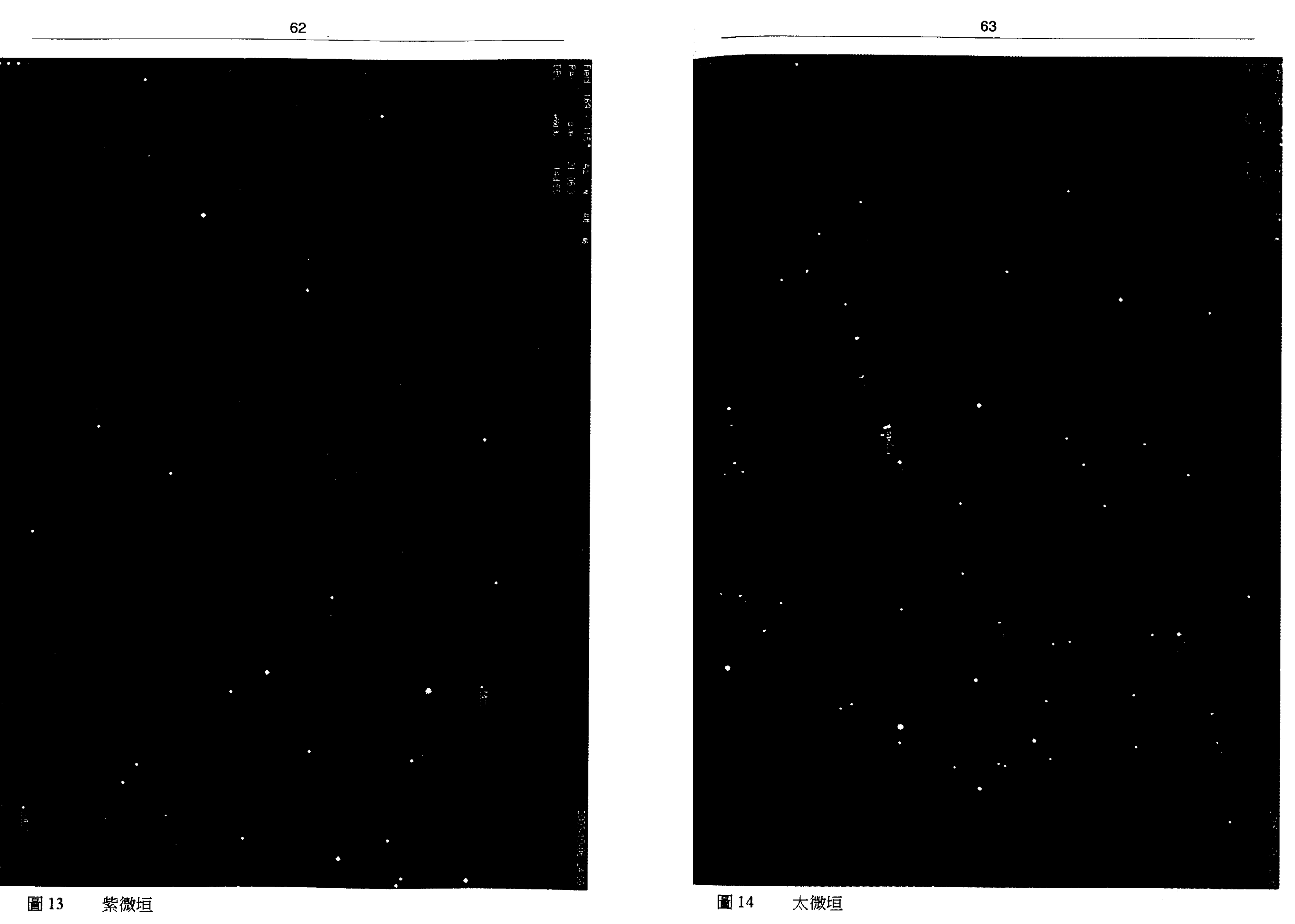


圖 13　紫微垣

圖 14　太微垣

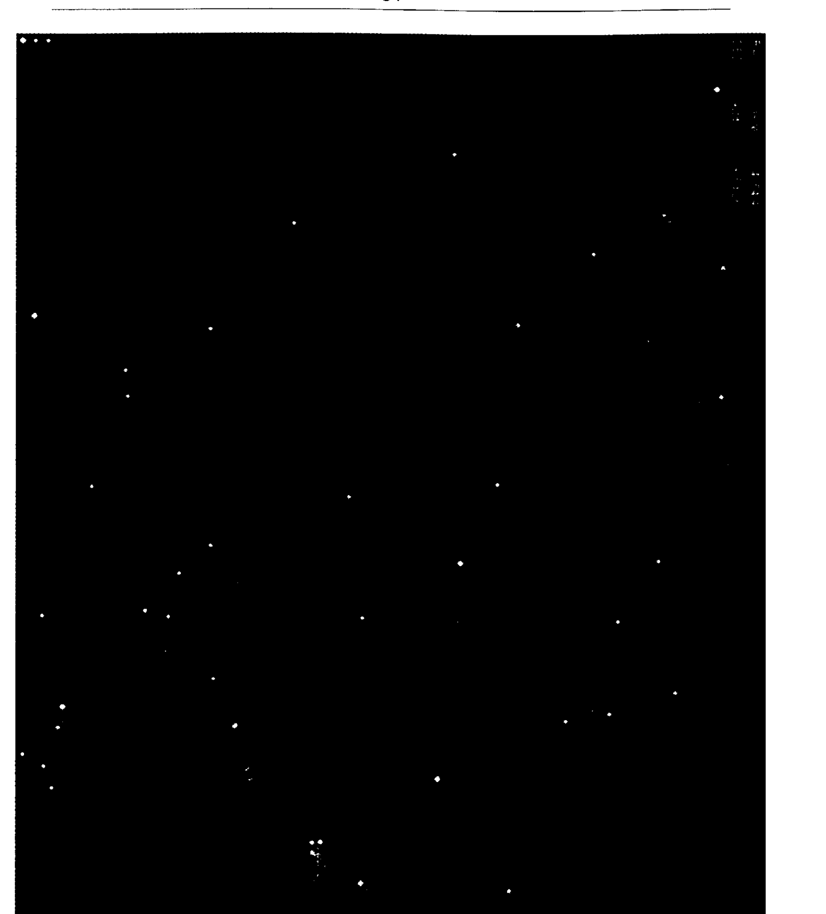


圖 15　天市垣

二十八宿是在黃道、赤道上的二十八個星官，用以觀測日、月及五大行星的運動。雖然跟三垣一樣同是天區，而且以二十八宿的名稱作為天區的名稱，它們比三垣更像黃道十二宮的星座。二十八宿又分開四組，稱為四象（又稱四宮），每象有七宿。四象分別為青龍（或蒼龍 Azure Dragon）、朱雀（或朱鳥 Vermilion Bird）、白虎（White Tiger）、玄武（Murky Warrior）。堪輿學上有所謂「左青龍、右白虎、前朱雀、後玄武」的說法。這裏左右、前後是指方向，當手拿羅盤時，將羅盤上二十四山中的「子」山（即北方玄武）向著自己，則朱雀、青龍和白虎會分別在前（南）方、左（東）方和右（西）方。有學者認為這是古時春分前後初昏時的天象。顏色方面則按東方木為青色，南方火為紅色，西方金為白色，北方水為黑色，以象五行。

為了建立觀測座標，而且星官的恒星數有的時候是多於一，所以在每一宿中必須要選定一夥星作為本宿的距星；下宿距星和本宿距星之間的赤經差，則作為本宿的赤道距度（或簡稱距度）。西漢初，《淮南子・天文訓》中載有二十八宿的距度，總距度是 365¼ 度，亦即是四分曆中一個回歸年的長度。以下列出各象七宿和它們的距度。

北方七宿：　斗 26 度、牛 8 度、女 12 度、虛 10 度、危 17 度、室 16 度、壁 9 度，共 98 度。

西方七宿：　奎 16 度、婁 12 度、胃 14 度、昴 11 度、畢 16 度、觜 2 度、參 9 度；共 80 度。

南方七宿：　井 33 度、鬼 4 度、柳 15 度、星 7 度、張 18 度、翼 18 度、軫 17 度；共 112 度。

東方七宿：　角 12 度、亢 9 度、氐 15 度、房 5 度、心 5 度、尾 18 度、箕 11¼度 ；共 75¼度。

上述二十八宿的距度是周天度數，自漢《三統曆》以來，一直沿用到唐朝爲止，一日即周天一度，一周天共 365.25 度。按祖沖之《大明曆》的記載：「**上元之歲，歲在甲子，天正甲子朔，夜半，冬至，日，月，五星聚于虛度之初**」，所以「**命以虛一次宿除之，算外**」。根據這段記載，便可將當時二十八宿與十二辰的關係作圖如下：



圖 16　　古二十八宿與十二辰對照圖

除非曆書上另有說明，一般的計算方法是從斗 1 度開始。比方說：假如計算出太陽在天正十一月朔夜半的赤經是 305 度，那麼便可以說太陽「入亢宿 3 度」。原因是：北方七宿距度＋西方七宿距度＋南方七宿距度＋角 12 度＋亢 3 度＝305 度。但這些距度跟後來李淳風的《麟德曆》與一行的《大衍曆》所記載的都不一樣。

隨著歲差的變化，各宿距度亦有所變化，但歲差的週期約 26,000 年，所以二十八宿距度的變化可以說是相當緩慢的。距度有比較明顯的變化反而在漢朝的前、後，這是因爲漢前、後部分的宿所選定的距星不同。比方說，漢以前牛宿的距星是摩羯座α_2（α_2 Cap，牛宿二），漢以後變成是摩羯座β（β Cap，牛宿一）；又或者是壁宿的仙女座（Andromeda）α（α And，Alpheratz，壁宿二）變爲飛馬座（Pegasus）γ（γ Peg，壁宿一）；等等。

古星圖中有蘇州石刻天文圖，建於南宋淳祐七年（1247CE），現存於蘇州市博物館。石碑中的星圖直徑 91.5 釐米，共刻有 1,400 多顆恒星。圖中有三個同心圓，內圓是 35˚N 的恒顯圈，外圓是恒隱圈，圈外是地平以下看不見的星空，中間的是天赤道，另有一偏心圓爲黃道，交天赤道於角宿和奎宿範圍的兩點，另有 28 條輻射綫，從圓心通過二十八宿中距星。此外，在外圓外還註明各宿的距度及「辰」、「次」、「分野」的名稱。見圖 17。

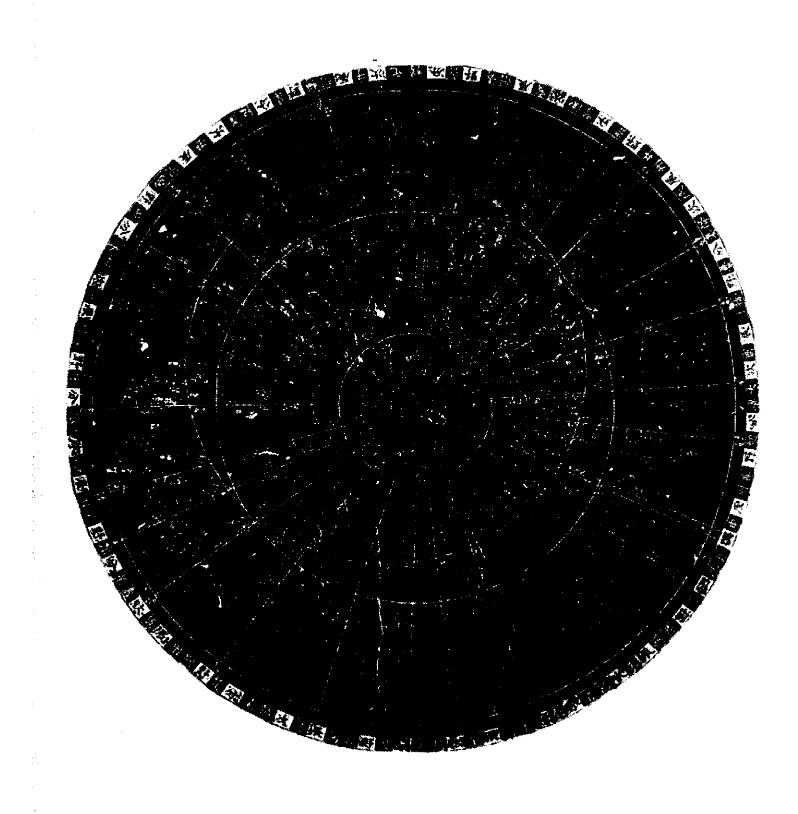


圖 17　蘇州石刻天文圖（蘇州市博物館藏）

假如要將周天 365¼度轉換爲 360°的話，可將度數乘以 $\frac{360}{365.25}$ 。如果一個恒星年等於 365¼日的話，則 $1-\frac{360}{365.25}$ 爲恒星年和回歸年之差。

很多有關二十八宿的研究尙沒有定論，例如始於何時？源於哪裏？因爲古印度亦有類似二十八宿（原來只有二十七宿，後來多加一宿）的記載，只是名稱和主星（假如把距星看成主星的話）不一樣而已。

中國早在春秋時期的《詩經》、《夏小正》、《尙書．堯典》等古籍中，就已經有有關二十八宿部分星官的記載，其中《詩經．鄘風．定之方中》有這樣的記載：「定之方中，作於楚宮，揆之以日，作於楚室」。「定」是指「定星」，即飛馬座 α（α Peg，Markab，室宿一）、β（β Peg，Scheat，室宿二）、γ（γ Peg，Algenib，壁宿一）和仙女座 α 的合稱，把這四星連起來便成一個接近長方形的四邊形，看起來像古代鋤的形狀，古時鋤又稱作「定」。按漢鄭玄的注解：「楚宮，謂宗廟也；定星昏中而正，於是可以營造宮室，故謂之營室」。

相信這是有關堪輿擇日動工最早的記載。又《尙書．堯典》更有「四仲中星」的四季天象記載，如：

「日中星鳥，以殷仲春」

「日永星火，以正仲夏」

「宵中星虛，以殷仲秋」

「日短星昴，以正仲冬」

其中仲春、仲夏、仲秋、仲冬是指斗建卯、斗建午、斗建酉和斗建子；「鳥」是指長蛇座（Hydra）α（α Hyd，Alphard，星宿一），「火」是指天蠍座 α（α Sco，Antares，心宿二，又名天王或大火或鶉火），「虛」是指寶瓶座 β（β Aqr，虛宿一），「昴」是指金牛座的 M45 七姊妹星團（Pleiades，統稱昴星團），其中包括金牛座 17（17 Tau，昴宿一）、19（19 Tau，昴宿二）、21（21 Tau，昴宿三）、20（20 Tau，昴宿四）、23（23 Tau，昴宿五）、25（η Tau，昴宿六）、27（27 Tau，Atlas，昴宿七）等七星。茲將十二次、二十八宿、十二辰的對應列表於下，以供參考：

十二次	二十八宿	十二辰
星紀	斗、牛	丑
玄枵	女、虛、危	子
娵訾	室、壁	亥
降婁	奎、婁	戌
大樑	胃、昴、畢	酉
實沈	觜、參	申
鶉首	井、鬼	未
鶉火	柳、星、張	午
鶉尾	翼、軫	巳
壽星	角、亢	辰
大火	氐、房、心	卯
析木	尾、箕	寅

表 5　　十二次、二十八宿、十二辰的對應表

① 蓋天說：據《晉書．天文志》記載：「其言天似蓋笠，地法覆槃，天地各中高外下。北極之下爲天地之中，其地最高，而滂沲四隤，三光隱映，以爲晝夜。天中高於外衡冬至日之所在六萬里。北極下地高於外衡下地亦六萬里，外衡高於北極下地二萬里。天地隆高相從，日去地恒八萬里」。按照這個宇宙圖式，天和地是兩個同心穹形，相距八萬里。

② 渾天說：渾天說可能始於戰國時期。屈原的《天問》就有「圜則九重，孰營度之」的說法，這裏的「圜」，學者認爲是天球；但比較有代表性的應該是《張衡．渾儀注》中的說法：「渾天如雞子。天體圓如彈丸，地如雞子中黃，孤居於內，天大而地小…」。。

③ 行星、恒星：簡單地說，太陽系中本身不發射可見光的類似球體，稱爲行星（Planet），如地球等。假如本身是由熾熱氣體組成，能自己發光的類似球體，稱爲恒星（Star）。離地球最近的恒星是太陽。

④ 偏心率：焦點（Focus）到橢圓中心的距離 c 與橢圓半長徑（Semi-major Axis）a 之比，一般用 e 來表示，即 $e=\frac{c}{a}$，或 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$，其中 b 爲半短徑（Semi-minor Axis）。它決定橢圓的形狀；若 $e=0$ 時，軌道是一個圓型。

⑤ 祖冲之（429 – 500CE）：南北朝宋文帝時期的數學家和天文學家。在數學上，計算出圓周率 π 的近似值準確度在小數點後七位，即

$3.1415926 < \pi < 3.1415927$，並確定了 π 的約率為 $\frac{22}{7}$，密率為 $\frac{355}{113}$。在曆法上，於 463CE 編制了《大明曆》，並於 510CE 使用。

⑥ 中天：天體經過觀察者的子午圈時稱為中天。經過包括天極和天頂的那半個子午圈時，天體到達最高位置，稱為上中天。相反，經過包括天極和天底的那半個子午圈時，天體到達最低位置，稱為下中天。「星」宿是二十八宿之一，見後文「星空的區分」。

⑦ 日蝕：月球在太陽與地球之間，並在蝕限範圍內，致使月球的陰影投落在地球上，地球上的觀察者會看到一個不完整的太陽，這種現象稱為日蝕；分別有日全蝕、日環蝕、和日偏蝕。月蝕的原因類似，不同的是，這時候地球在太陽和月球之間，地球的陰影投落在月球上。

⑧ 宿：二十八宿中的宿，漢語拼音讀作 xiu，去聲；粵音為「秀」。有停留、居住的意思。

⑨ 注：在春分、秋分點上，實際的晝、夜長度還是不等的。這是由於陽光在大氣層折射的原因，使日出前及日落後仍有足夠的光綫，所以古代的「昏」、「旦」都是抽象的名詞。

⑩ 距星：「星宿」中的一個用作參考座標用的恒星，用來測量該星宿跟其他星宿的赤經距離。

⑪ 注：「泰」是伏羲六十四卦之一；地天泰即上坤☷下乾☰，屬於十二消息卦之一。《易》的中心思想是陰陽消長，陽從陰生，陰從陽長，以亥月為極陰，以坤為地為消息卦，即上坤☷下坤☷；子月則為一陽「復」始，即地雷復，上坤☷下震☳；丑月為二陽來「臨」，即地澤臨，上坤☷下兌☱；寅月為三陽啓「泰」。寅月以立春為節，故夏曆建寅，為春天的開始，以指導新一年農業活動。

⑫ 注：詳見嚴敦傑（1917 – 1988CE）《祖冲之科學著作校釋》（遼寧教育出版社 2000 年 10 月第一版）。

⑬ 垣：圍牆的意思。文中三垣和二十八宿的英文譯名引自陳己雄著的《中國古星圖 Chinese Ancient Star Map》（香港太空館編制、香港康樂及文化事務署 2002 年出版）。此外，中國的星官名稱不在這裏一一取錄，請詳細參閱上述「古星圖」。

第三章 中國曆法演算的數學依據

上元積年

中國的古曆法向來都注重「上元」的選擇。什麼是上元？上元可以理解爲時間計量的初始曆元（Initial Epoch）。在測量時間時，除了要確定時間單位外，還需要確定時間的起點，這個起點就叫時間計量的初始曆元。既然是計量時間的起點，那麼它應該是一個理想的時刻。爲了要配合有中國特色的冬至、朔望、日名、歲名、十二辰、歲星、日月蝕、五緯七曜等因素，一個理想的上元應該是甲子年天正（子月）冬至甲子日虛宿夜半（子時）合朔，且出現「日月合璧、五星聯珠」天象（即日月赤經相同，五大行星又同在一個方位）的時刻，甚至還要考慮到交點月、近點月等天文現象。換言之，古時天文學家認爲一個理想的上元，實際上應該是若干個天文週期的共同起點。遺憾的是，這種天象可以說是不存在的，古時曆法家

只能按照編曆時對天象觀測的結果來推算一個滿足上述條件的上元，为了方便计算，並使得上元積年少於 10^8。

從上元到編曆年份的累積年數爲積年，稱上元積年，用 N_n 表示，其中 n 爲編曆的年份。比如，N_{-104} 爲 104BCE 編曆時某一個上元的上元積年。由於各曆法所選擇的上元不同，同是 104BCE，上元積年的值可以不一樣。此外，對同一個上元來說，不同的 m 和 n，有下面的一個關係：

$$N_m = N_n + (m - n) \qquad \text{其中 } m > n \qquad (1)$$

與上元有關的天文常數有：回歸年、朔望月、恒星年、交點月、近點月、和五大行行星的會合週期，再加上日名、歲名的干支週期，求解上元積年就相當於求解一個可以超過 11 個聯立的一次同餘式組。設 t 爲回歸年，u 爲朔望月，u_i 分別爲恒星年（$i=1$）、近點月（$i=2$）、交點月（$i=3$）、以及五大行星的會合週期（$i=4, 5, 6, 7, 8$），則理想的上元可由下列同餘式組求解：

$$\begin{cases} N_n \equiv R_0 \pmod{60} \\ t\,N_n \equiv r_D \pmod{60} \\ t\,N_n \equiv r_M \pmod{u} \\ t\,N_n \equiv r_i \pmod{u_i} \end{cases}$$

假如上元始於甲子年（歲名）天正十一月冬至甲子（日名），則上列一次同餘式組中：$t\,N_n$ 爲上元積年的全部時間；R_0 爲所求年的歲名；r_D 爲所求年天正十一月冬至日到上一個甲子日的全部時間，整數部分是日名，小數部分（小餘）爲時刻；r_M 爲所求年冬至離開十一月平朔的時間（閏餘），r_1 爲上元至所求年冬至點位移，r_2 爲所求年冬至時刻月球近地點與冬至點的距離，r_3 爲所求年冬至時刻升（降）交點與冬至點的距離，r_i（i = 4, 5, 6, 7, 8）爲所求年冬至時刻距太陽與五大行星會合時刻的時間。

假如上元不是甲子年，又或者冬至日不在甲子日等，則上述一次同餘式組要改爲：

$$\begin{cases} N_n \equiv R_0 - a_0 \pmod{60} \\ t\,N_n \equiv r_D - a_D \pmod{60} \\ t\,N_n \equiv r_M - a_M \pmod{u} \\ t\,N_n \equiv r_i - a_i \pmod{u_i} \end{cases}$$

式中 a_0 爲歲應，a_D 爲氣應，a_M 爲閏應

上述同餘式組不是不可解，可也不是容易，求解這個同餘式組有兩種方法：一、使用中國剩餘定理（又稱大衍總數術），二、代入法（即演紀術）；無論是哪一種方法，隨著觀測精度增加、要考慮的天文常數增加，上元積年也就愈來愈大，結果導至元朝郭守敬在編制《授時曆》時，廢除了上元積年。

中國剩餘定理（大衍總數術）

設有同餘式組 $x \equiv r_i (\mathrm{mod}\, a_i), i \in N$ （即 i 爲自然數 Natural Number，自然數用 N 表示），且 a_i, a_j 均爲素數，最大公因素（ Highest Common Factor，HCF）爲 1，即 $(a_i, a_j) = 1, \quad i \neq j$

令 M 爲所有模數（Mode）a_i 的乘積（Multiplication），即

$$M = \prod_i a_i \quad , \quad M_i = \frac{M}{a_i} \quad , \quad i \in N$$

M 亦即是所有模數的最小公倍數（Least Common Multiplication，LCM）。運用大衍求一術求得乘率 k_i，使得

$$k_i M_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, a_i) \quad , \quad i \in N$$

則上述同餘式組之通解爲：

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i k_i M_i - PM$$

選擇適當的 $P \in N$ 並使得 $0 \leq x < M$ 。

代入法（演紀術）

只要能解出一次同餘式 $ax \equiv r (\mathrm{mod}\, b)$，就可以用代入法（Substitution）逐步求解任何給定的同餘式組，但這同餘式的有解條件爲 $(a,b) \mid r$ （即 r 爲 a 和 b 最大公因素的倍數），運用大衍求一法求得乘率 k，使 $ak \equiv (a,b)(\mathrm{mod}\, b)$ ，則同餘式的解爲：

$$ax \equiv r(\bmod b) \qquad ak \equiv (a,b)(\bmod b)$$
$$ax = r + mb \qquad ak = (a,b) + nb$$

其中　$m, n \in N$

$\because$ $(a,b)\mid r$ ，即(a,b)爲 a，b，和 r 的因子

$$\therefore \frac{a}{(a,b)}x = \frac{r}{(a,b)} + m\frac{b}{(a,b)}$$
$$\frac{a}{(a,b)}k = 1 + n\frac{b}{(a,b)} \tag{2}$$

上面第一式各項乘以 k

$$\frac{a}{(a,b)}kx = k\frac{r}{(a,b)} + mk\frac{b}{(a,b)}$$
$$\left(1 + n\frac{b}{(a,b)}\right)x = k\frac{r}{(a,b)} + mk\frac{b}{(a,b)}$$
$$x = k\frac{r}{(a,b)} + (mk - nx)\frac{b}{(a,b)}$$

則同餘式之解爲：

$$x \equiv k\frac{r}{(a,b)}\left(\bmod \frac{b}{(a,b)}\right) \tag{3}$$

連分數的展開與漸近分數

在 這 裏 討 論 連 分 數 的 展 開 和 漸 近 分 數（Convergents），不是太恰當，有興趣的讀者可參考一些有關數論（Number Theory）的書。在這裏我只想介紹連分數的展開形式和它的一些特性。在數學上，任意一個實數（Real Number，用 R 來表示）都可以用連分數的展開來求出它的一系列的漸近分數。這種應用莫如最著名的圓周率 π 的推算。首先讓我們先看一看一個常見的連分數：

設 $x \in R$　和　$a_0, a_1, a_2, \cdots \in I$（$R$ 爲實數，I 爲整數）

則
$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} \tag{4}$$

有時爲了便於書寫，上式可以寫成爲：$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$

令　$a_0 = \lfloor x \rfloor$，即 x 的整數部分

則 $a_1 = \left\lfloor \dfrac{1}{x - a_0} \right\rfloor$，$a_2 = \left\lfloor \dfrac{1}{\dfrac{1}{x - a_0} - a_1} \right\rfloor$，…

若令 $r_0 = x$ 和 $r_n = \dfrac{1}{r_{n-1} - a_{n-1}}$

則 a_n可以寫成爲: $a_n = \lfloor r_n \rfloor$，式中 a_n 稱爲部分商 Partial Quotients

若以分數 $\dfrac{p_n}{q_n}$ 來表示 n 項連分數的漸近值，則稱爲第 n 項漸近，即:

$$c_n = \frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

，其中 p_n和 q_n爲非負整數。

連分數在某種意義上爲有理數（Rational Number）提供最近似的系列分數解。現以下表來展示圓周率 π 的展開。

Partial Quotients	a_n 數值	x	漸近值	
a_0	$\lfloor \pi \rfloor = 3$	[3]	3	3.000 000 0
a_1	$\left\lfloor \dfrac{1}{\pi - 3} \right\rfloor = 7$	[3;7]	$\dfrac{22}{7}$	3.142 857 1
a_2	$\left\lfloor \dfrac{1}{\dfrac{1}{\pi - 3} - 7} \right\rfloor = 15$	[3;7,15]	$\dfrac{333}{106}$	3.141 509 4
a_3	$\left\lfloor \dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\pi - 3} - 7} - 15} \right\rfloor = 1$	[3;7,15,1]	$\dfrac{355}{113}$	3.141 592 9

表 6　圓周率 π 連分數展開的演算

國際上稱 $\dfrac{335}{113}$ 爲祖率。祖冲之計算出來的 π 值在 $3.141\,592\,6 < \pi < 3.141\,592\,7$ 之間，那麼它的漸近分數系列前幾個分數依次爲：

$$\frac{3}{1},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{103\,993}{33\,102},\quad \cdots$$

以現代 $\pi = 3.141\,592\,653\,58\cdots$ 的精度來看，上面分數系列的第五項（即第四項漸近 4th Convergent）應爲 $\dfrac{104\,348}{33\,125}$ 。

既然有限項的連分數（Finite Continued Fraction）可以用一系列漸近分數表示，讓我們再花一點時間看一看它會有什麼特性。首先，所有有理數都可以用有限項連分數展開式來表達，通常有兩種表達形式：

$$c_n = \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$$
$$= \begin{cases} [a_0; a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n - 1, 1] & for \quad a_n > 1 \\ [a_0; a_1, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1] & for \quad a_n = 1 \end{cases}$$

令 $$\begin{cases} p_{-2} \equiv 0 & q_{-2} \equiv 1 \\ p_{-1} \equiv 1 & q_{-1} \equiv 0 \\ p_0 \equiv a_0 & q_0 \equiv 1 \end{cases}$$

則 $$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$ 式中

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1} \qquad (5)$$

且 $$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}} \quad , \quad c_n - c_{n-2} = \frac{a_n (-1)^n}{q_n q_{n-2}}$$

上面 $c_n - c_{n-1}$ 的意義是任意兩個相鄰的漸近分數之差，其分子的絕對值（Absolute Value）必爲 1 。

可以說，對任意一個數 x ，其簡單無限項連分數展開的漸近分數系列的雙數項（Even Convergents）c_{2m} 是遞增系列，其單數項（Odd Convergents）c_{2m+1} 是遞減系列，即

$$c_0 < c_2 < \cdots < c_{2m} < \cdots < x < \cdots < c_{2m+1} < \cdots < c_3 < c_1$$

m 爲非負整數。所以，當 $n \geq 3$ 時，每一個漸近分數必定落在前兩個漸近分數的中間，而且每一個漸近分數必定比前一個漸近分數更逼近 x ，因爲

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$$

其次，若果

$$x=\frac{p_n+\sigma p_{n+1}}{q_n+\sigma q_{n+1}} \quad ,\sigma>1, \quad |p_n q_{n+1}-p_{n+1}q_n|=1$$

則 $\frac{p_n}{q_n}$ 和 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 必為 x 的兩個相鄰的漸近分數。

以此來驗證圓周率 π 。假設 $\frac{3}{1}$ 和 $\frac{22}{7}$ 是圓周率的兩個相鄰的漸近分數，其中 $|3\times7-1\times22|=1$

當 $\sigma=15$ 時， $\pi=\frac{3+15\times22}{1+15\times7}=\frac{333}{106}$

同理， $|7\times333-106\times22|=1$

當 $\sigma=1$ 時， $\pi=\frac{22+1\times333}{7+1\times106}=\frac{355}{113}$

調日法

調日法是南北朝時期宋何承天在編制《元嘉曆》時所創設選擇「日法」的一種演算法。中國的天文常數大都是

用分數來表達，日法就是朔望月的分母。從歷代曆法中朔望月分母的選取，有證據顯示調日法是漸近分數演算法的一種應用。何承天在《元嘉曆》中給出了兩個漸近分數 $\frac{26}{49}$ 和 $\frac{9}{17}$ ，分別稱爲強率和弱率，即 $29\frac{26}{49}>u>29\frac{9}{17}$ ，其中 u 爲朔望月的長度。根據分數的加成法則，對任意的 $m,n\in N$ ，其中 m 和 n 分別稱爲強數和弱數，可以得到不等式：

$$\frac{26}{49}>\frac{26m+9n}{49m+17n}>\frac{9}{17}$$

適當地選擇 m 和 n 使得 $\frac{26m+9n}{49m+17n}$ 逼近實測朔望月的非整數部分，則日法爲：

$A=49m+17n$ 　而朔望月 $u=\frac{U}{A}=29+\frac{26m+9n}{49m+17n}$

式中 $\frac{26m+9n}{49m+17n}$ 稱爲何承天數[①]，可用 H_n^m 來表示。

其實，何承天數這個表達式，不單止用在調日法，而且還可以用在其他天文常數的調取，如近點月的餘數、平

氣、閏周、及交蝕週期等，只要能確定有關常數的強率和弱率，便可將有關常數的漸近分數反復推算。

茲將有關常數的強、弱率列表如下：

常數	強率	弱率
朔望月餘數＝朔餘／日法	$\frac{26}{49}$	$\frac{9}{17}$
近點月餘數＝轉餘／日法	$\frac{5}{9}$	$\frac{56}{101}$
平氣＝除法／乘法 ②＝回歸年／24	$\frac{487}{32}$	$\frac{1\,324}{87}$
閏周＝章月／章歲	$\frac{235}{19}$	$\frac{136}{11}$
交蝕週期	$\frac{242}{223}$	$\frac{777}{716}$

表 7　　有關天文常數強、弱率的取值

內插法

由於太陽的運動是不均勻的，爲了準確地計算太陽的位置，在中國曆法演算當中有所謂日躔術。既然中國的曆法是從冬至點起算，那麼日躔術的目的就是爲了推算在一個回歸年當中，從冬至點開始太陽每天實際運行與平均運行的差距。一般的曆法都會給出一個日躔表，表中列明每一個節氣中太陽實際運行和平均運行差距的改變值，以及這些改變值從冬至日起算的累加值，並利用節氣間數值分段地進行二次或三次內插計算，從而求得每一天的日躔數值。

什麼是內插法（Interpolation）？

簡單地說，內插法就是求解一個高次函數在已知點之間的函數值的方法。比方說，二次函數 $f(x)=x^2$ ，當 $x=1, 2, 3, \cdots$ ， $f(x)=1, 4, 9, \cdots$ ；但當 $x = 2.3$ 時，$f(x)$ 又等於多少呢？

中國曆法中內插法的應用，始於隋朝劉焯（544 - 610CE）的《皇極曆》，現代數學稱爲等間距二次差內插法（Equal Interval Difference Interpolation of Second Degree）。後來，發展到一行（683 – 727CE）《大衍曆》中的不等間距二次差內插法（Unequal Interval Difference Interpolation of Second Degree），以至王恂、郭守敬在《授時曆》中的定、平、立三差算法（Techniques of Linear, Square, Cubic Differences），即現代數學的三次差內插法（Difference Interpolation of Third Degree）。

內插法起碼超過十種不同的的演繹，在這裏讓我們用多項式（Polynomial）來探討一下。

以 x 爲變數的一個任意函數 f，總僅有一個 n 次多項式使其值在 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 點上符合函數 f 的數值，該一元 n 次多項式可以寫成：

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

式中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 爲多項式係數。要確定這些係數的數值，讓我們引入牛頓的差分（Divided Difference）的概念。

設對應於 x_i，函數 f 的第零次差分（Zeroth Divided Difference）爲：

$$f[x_i] = f(x_i)$$

即　$f[x_0] = f(x_0)$，$f[x_1] = f(x_1)$，$\cdots$

則我們可以利用下表來求出其他的差分的表示式。

x	函數 f	第一次差分	第二次差分	第三次差分
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$ $=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$ $=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]$ $=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2x_3]$ $=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$ $=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]$ $=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$ $=\dfrac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$ $=\dfrac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]$ $=\dfrac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		
x_4	$f[x_4]$			

表 8　　函數 f 的牛頓內插法差分的表示式

從某種意義上說，上表中的第一、第二次的差分相當於第一、第二次的微分（Differentials），當

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= a_0 \\
P_1(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) \\
P_2(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f[x_0] \\
a_1 &= P_1'(x) = f[x_0,x_1] \\
a_2 &= P_2''(x) = f[x_0,x_1,x_2]
\end{aligned}
$$

所以　$a_k = f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$　其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, n$

則原多項式可以改寫爲差分的公式：

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\
&\quad + f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)(x-x_{n-1}) \\
&= f[x_0] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} f[x_0,x_1,\cdots,x_k](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})
\end{aligned}
\quad (6)
$$

等間距二次差內插法

因爲 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲等間距

可令 $q = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$)且 $x = x_0 + pq$

得 $x - x_i = (p - i)q$ ，代入上式可得：

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= P(x_0 + pq) \\
&= f[x_0] + pq\, f[x_0, x_1] \\
&\quad + p(p-1)q^2 f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\
&\quad + p(p-1)\cdots(p-n+1)q^n f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \\
&= \sum_{k=0}^{n} p(p-1)\cdots(p-k+1)q^k\, f[x_0, x_1, \cdots, x_k]
\end{aligned}
$$

由於

$$
\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}
$$

所以 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} k!\, q^k\, f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$

當 $n \geq 0$ 時，令前向差（Forward Difference）爲 $\Delta_{P_n} = P_{n+1} - P_n$ ，（顧名思義，後向差 Backward Difference 爲 $\nabla_{P_n} = P_n - P_{n+1}$ ）

高階的 Δ_{P_n} 可以寫爲 $\Delta^k_{P_n} = \Delta^{k-1}(\Delta_{P_n})$

以茲代入商差，得

$$
f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1}{q}\Delta f(x_0)
$$

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{1}{2q}\left(\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}\right) \\
&= \frac{1}{2q}\left(\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{q}\right) \\
&= \frac{1}{2q^2}\Delta^2 f(x_0)
\end{aligned}
$$

即 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{1}{k!\, q^k}\Delta^k f(x_0)$

則原多項式可寫成： $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \Delta^k f(x_0)$

稱爲牛頓的前向差公式。

既然是二次（Second Degree，即 x 的平方）插值，我們取牛頓差分公式的前三項，得

$$P_2(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)$$
$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

令 $x=nq+s$ ，$x_0=nq$

且 $x_i=x_0+qi$ ，$0\leq s<q$

則

$$P_2(nq+s)=f(nq)+\frac{s}{q}(f[x_1]-f[x_0])$$
$$+\frac{s(s-q)}{2q^2}((f[x_2]-f[x_1])-(f[x_1]-f[x_0]))$$

令 $\Delta_1=f[x_1]-f[x_0]$ 和 $\Delta_2=f[x_2]-f[x_1]$

則上式變爲：

$$P_2(nq+s)=f(nq)+\frac{s}{q}\Delta_1+\frac{s(s-q)}{2q^2}(\Delta_2-\Delta_1)$$

或

$$P_2(nq+s)-f(nq)$$
$$=\frac{s}{2q}(\Delta_1+\Delta_2) \qquad (7)$$
$$+\frac{s}{q}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{s^2}{2q^2}(\Delta_1-\Delta_2)$$

上式右邊是 s 的差分函数（Difference Function）$f(s)$。

根據劉焯的演算法，以 q 爲一個節氣的長度，$f(x)$ 爲盈縮分（當時稱遲速率），其中 $x=nq+s$ ，$0\leq s<q$ ，s 爲冬至（$n=0$，$s=0$）後第 n 個節氣後第 s 日。

> 「見求所在氣陟降率，並後氣率半之，以日限乘而汎總除，得氣末率。又日限乘二率相減之殘，汎總除，為總差。其總差亦日限乘而汎總除，為別差。」

q本來是一個平氣的長度，即回歸年除以 24，但唐、宋時期一般都用漸近分數表達，並稱其分子爲除法，分母爲乘法，即 $q=\frac{\text{除法}}{\text{乘法}}=\frac{\text{回歸年}}{24}$ 。因應不同的回歸年長度，q的數值應該在 15.218 5 附近。《皇極曆》中，「汎總」是「盈汎」和「虧總」的總稱，即上述的除法，取值分別爲 170 和 160；日限，即上述的乘法，取值爲 11。中國古曆法中平氣的漸近分數分別取 $\frac{487}{32}$ 和 $\frac{1324}{87}$ 爲強、弱率 ③，《皇極曆》中 160, 170, 11 這三個數值的選取有點費解 ④。

節氣的長度 = 汎總／日限。文中「日限乘，汎總除」即除以 q ，所以我們不必在這裏糾纏在汎總和日限的取值上。

$$\text{朓降率（即第一次差分）}$$

$$\Delta_n = f((n+1)q - f(nq)) \quad , n = 1, 2, \cdots$$

$$\text{氣末率} = \frac{1}{2q}(\Delta_n + \Delta_{n+1})$$

總差和別差分別爲：

$$\text{總差} = \frac{1}{q}\left|\Delta_n^2\right| \quad , \Delta_n - \Delta_{n+1} = \nabla_n^2 = -\Delta_n^2$$

$$\text{別差} = \frac{1}{q^2}\left|\Delta_n^2\right|$$

「率前少者，以總差減末率，為初率，乃別差加之；前多者，即以總差加末率，皆為氣初日朓降數。以別差前多者日減、前少者日加初數，得每日數。所曆推定氣日隨算其數，朓加、降減其遲速，為各遲速數。」

這裏描述了兩種情況，一是「前少」，二是「前多」，即：

$$\text{當 } \Delta_n < \Delta_{n+1} \text{，} \quad \text{初率} = \frac{\Delta_n + \Delta_{n+1}}{2q} - \frac{\left|\Delta_n^2\right|}{q} + \frac{\left|\Delta_n^2\right|}{q^2}$$

$$\text{當 } \Delta_n > \Delta_{n+1} \text{，} \quad \text{初率} = \frac{\Delta_n + \Delta_{n+1}}{2q} + \frac{\left|\Delta_n^2\right|}{q}$$

初率這樣的處理，基本上是避開處理負數，而按「前少」、「前多」分別列出二條公式；以當時曆算的水準，處理負數不應該有什麼困難。這一點筆者想不出什麼原因。用 $\Delta_n - \Delta_{n+1}$ 來表達，上二式可以改寫爲：

$$\text{當 } \Delta_n < \Delta_{n+1} \text{，} \quad \text{初率} = \frac{\Delta_n + \Delta_{n+1}}{2q} + \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{q} + \frac{\left|\Delta_n^2\right|}{q^2}$$

$$\text{當 } \Delta_n > \Delta_{n+1} \text{，} \quad \text{初率} = \frac{\Delta_n + \Delta_{n+1}}{2q} + \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{q}$$

則兩節氣中第 s 日的朓降率爲：

當$\Delta_n < \Delta_{n+1}$， $\dfrac{\Delta_n + \Delta_{n+1}}{2q} + \dfrac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{q} + \dfrac{\left|\Delta_n^2\right|}{q^2} + (s-1)\dfrac{\left|\Delta_n^2\right|}{q^2}$

當$\Delta_n > \Delta_{n+1}$， $\dfrac{\Delta_n + \Delta_{n+1}}{2q} + \dfrac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{q} - (s-1)\dfrac{\left|\Delta_n^2\right|}{q^2}$

則冬至後第 x 日的遲速率函數爲：

當$\Delta_n < \Delta_{n+1}$，

$$f(nq+s) - f(nq) = \frac{s}{2q}(\Delta_n + \Delta_{n+1}) + \frac{s}{q}(\Delta_n - \Delta_{n+1}) - \frac{s^2}{q^2}(\Delta_n - \Delta_{n+1})$$

當$\Delta_n > \Delta_{n+1}$，

$$f(nq+s) - f(nq) = \frac{s}{2q}(\Delta_n + \Delta_{n+1}) + \frac{s}{q}(\Delta_n - \Delta_{n+1}) - \frac{s(s-1)}{q^2}(\Delta_n - \Delta_{n+1})$$

上列函數右邊爲盈縮分函數，亦即是所謂等間距二次差內插公式。與牛頓差分公式取二次項比較，上列公式形式上是相似的，但實質上是有誤差，而且問題出在別差上（当$\Delta_n < \Delta_{n+1}$时，多了半個別差）。雖然如此，劉焯也總算是開了在曆法上應用二次差內插演算法的先河，功不可沒。

不等間距二次差內插法

明白了等間距二次差內插法以後，不等間距二次差內插法也就不難明白了。一行以 q_1, q_2 爲兩個不等間距離，在太陽軌道上的三點和它們的函數值分別爲：$p, p+q_1, p+q_1+q_2$ 和 $f(p), f(p+q_1), f(p+q_1+q_2)$，並以 s 爲間距內的任意一點，然後用下面的方法來導出該點的盈縮分函數。

按《大衍曆》中的描述：

「以所入氣並後氣盈縮分，倍六爻乘之，綜兩氣辰數除之，為末率。又列二氣盈縮分，皆倍六爻乘之，各如辰數而一，以少減多，餘數為氣差。至後以差加末率，分後以差減末率，為初率。倍氣差，亦倍六爻乘之，復綜兩氣辰數除，為日差。半之，以加、減初、末，各為定率。以日差至後以減、分後以加氣初定率，為每日盈縮分。乃駠積之，隨所入氣日加、減氣下先後數，各其日定初。」

文中多次提及「倍六爻乘」、「氣辰數除」：「倍六爻乘」即乘以 $2\times 6=12$ 時辰，「氣辰數除」即除以 $12\times q_1$ 或 $12\times q_2$ 或 $12\times(q_1+q_2)$。實際上，即是除以 q_1, q_2, 或（q_1+q_2）。在這個定義下，：

$$末率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{q_1+q_2}$$

$$氣差=\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}$$

二至後，　$$初率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{q_1+q_2}+\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)$$

二分後，　$$初率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{q_1+q_2}-\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)$$

$$日差=\frac{2}{q_1+q_2}\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)$$

$$定率=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{q_1+q_2}+\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)-\frac{1}{q_1+q_2}\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)$$

一般的慣例都是以冬至起算，那我們就先把二分後的初率擱置不理，只用二至後的初率爲準。定率實即氣初定率，即第一日的盈縮分，則每 s 日的盈縮分可由下式表達：

$$\frac{\Delta_1+\Delta_2}{q_1+q_2}+\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)-\frac{1}{q_1+q_2}\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)$$
$$-\frac{(s-1)}{q_1+q_2}\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)$$
$$=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{q_1+q_2}+\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)-\frac{s}{q_1+q_2}\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)$$

所以冬至後每日的盈縮函數爲：

$$f(p+s)-f(p)=s\frac{\Delta_1+\Delta_2}{q_1+q_2}+s\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)-\frac{s^2}{q_1+q_2}\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)$$

若以牛頓的差分公式來表達，則有：

$$P_2(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

式中 $x=p+s, x_0=p, x_1=p+q_1, x_2=p+q_1+q_2$

$$P_2(p+s)=f(p)+s\,\frac{f[p+q_1]-f[p]}{q_1}$$
$$+s(s-q_1)\frac{f[p+q_1+q_2,p+q_1]-f[p+q_1,p]}{q_1+q_2}$$

$$P_2(p+s)-f(p)$$
$$=s\frac{\Delta_1}{q_1}+\frac{s(s-q_1)}{q_1+q_2}\left(\frac{\Delta_2}{q_2}-\frac{\Delta_1}{q_1}\right) \qquad (8)$$
$$=s\frac{\Delta_1+\Delta_2}{q_1+q_2}+s\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)-\frac{s^2}{q_1+q_2}\left(\frac{\Delta_1}{q_1}-\frac{\Delta_2}{q_2}\right)$$

上式右邊亦與一行的演算法所推出來的公式相同。若式（7）中 $q_1=q_2=q$，則：

$$P_2(p+s)-f(p)=\frac{s}{2q}(\Delta_1+\Delta_2)$$
$$+\frac{s}{q}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{s^2}{2q^2}(\Delta_1-\Delta_2) \qquad (9)$$

亦即是等間距二次差內插公式。

定、平、立三差演算法

王恂、郭守敬的定、平、立三差演算法從意義上說是符合現代的三次內插法。明末清初《天文大成管窺輯要》第八卷記載關於「論日躔盈縮差」的演算法比較詳盡。

> 「郭太史立招差法以推之：列實測盈縮積差各六段，亦以六除二至後所入初末限，得盈縮每段積日。各以段積日除各段下積差，得各段平差，是差雖平於一段，而較之各段猶未平也，即為每段汎平差積。以各段平差前後相減為一差，其得數尚未齊，乃平差逐段漸少之差分也。又以一差前後相減為二差，而各段之得數齊矣。」

文中二至是指冬至與夏至，一般都是以冬至作為參考。試以 x 和 $f(x)$ 分別為冬至後所求太陽盈縮差的日數和盈縮數值。由於冬至日時，x 和 $f(x)$ 都為零。由此可設想，函數 $f(x)$ 的形式可以是 $f(x)=x\,F(x)$ 。那麼 $F(x)$ 亦可以用 n 次多項式來表達。

《元史・卷五十二・志第四・曆一》[24]「日行盈縮」中有這樣的描述：

「日月之行，有冬有夏，言日月行度，冬夏各不同也。人徒知日行一度，一歲一周天，曾不知盈縮損益，四序有不同者。…夫陰陽往來，馴積而變，冬至日行一度強，出赤道二十四度弱，自此日軌漸北，積八十八日九十一分，當春分前三日，交在赤道，實行九十一度三十一分而適平。」

此外，於《元史・卷五十四・志第六・曆三・授時曆經上》「步日躔第三」亦給出「盈初縮末限」爲八十八日九千九十二分少（即 88.909225 日）。

按《授時曆》的「二十四氣日積度盈縮」表，從冬至到春分，經歷過六個節氣，若將冬至到春分分成六段，則每段的數值可於下表列出。因爲當時還是以「日行一度」作爲平均值，那麼太陽的日躔盈縮差分就等於實測數據減去平均數據。

段（n）	每段積日（m =nq）	每段盈縮分積差 f (nq)
0 冬至	0	0
1 小寒	14.818 204	7 058.025 0
2 大寒	29.636 408	12 976.392 0
3 立春	44.454 613	17 693.746 2
4 雨水	59.272 817	21 148.732 8
5 驚蟄	74.091 021	23 279.997 0
6 春分	88.909 225	24 026.184 0

表 9　《授時曆》冬至到春分的累積日數和累積差分

（1 度爲 10 000 分 ⑤）

各段平差即 $F(nq)=\dfrac{f(nq)}{nq}$

各段一差爲 $\Delta_n = F((n+1)q)-F(nq)$

各段二差則爲 $\Delta_n^2 = \Delta_{n+1}-\Delta_n$

則上表可轉變爲下表並求 $F(nq)$ 之值：

n	$F(nq)$	$\Delta F(nq)$	$\Delta^2 F(nq)$	$\Delta^3 F(nq)$
0				
1	476.307 717			
		-38.454 660		
2	437.853 057		-1.380 167	
		-39.834 827		0
3	398.018 230		-1.380 167	
		-41.214 994		0
4	356.803 236		-1.380 167	
		-42.595 162		0
5	314.208 075		-1.380 167	
		-43.975 329		
6	270.232 746			

表 10　　《授時曆》定、平、立三差演算表

「即以第一段平差為汎平積，用本段二差加減一差為汎平差，以加減汎平差為定平積。是即所謂定差也。以二除二差為立差，加減汎平差為定平差，以段日除之，為日定平差，即所謂平差也。以段日再除立差為日立差，即所謂立差也。」

汎平差即 $\left|\Delta_1-\Delta^2\right|$ ，則定差爲 $F(nq)+\left|\Delta_1-\Delta^2\right|$

立差即 $\dfrac{\left|\Delta^2\right|}{2}$ ，則定平差爲 $\left|\Delta_1-\Delta^2\right|-\dfrac{\left|\Delta^2\right|}{2}$

定平差除以 nq ，即爲平差 $\dfrac{1}{nq}\left(\left|\Delta_1-\Delta^2\right|-\dfrac{\left|\Delta^2\right|}{2}\right)$

日立差爲 $\dfrac{\left|\Delta^2\right|}{2nq}$ ，則立差爲 $\dfrac{\left|\Delta^2\right|}{2(nq)^2}$

「其加減法皆以後多前少者為減，前多後少者為加，是以求差之法：置立差，以限乘之，並平差，再以限乘之；以平差一除，故一乘，立差再除，故再乘也。蓋以平、立二差為消息之法，用之以減定差，其定差又與限相乘而得差者，以段積日與段積差相除故也。所得盈縮差數與所測允合。此以三差立法，最為奇捷。」

所謂消息之法，實即插值函數，定義爲：

$$\left[\frac{1}{nq}\left(\left|\Delta_1-\Delta^2\right|-\frac{\left|\Delta^2\right|}{2}\right)+\frac{\left|\Delta^2\right|}{2(nq)^2}x\right]x$$

$$F(x)=\left[F(nq)+\left|\Delta_1-\Delta^2\right|\right]$$

則

$$-\left[\frac{1}{nq}\left(\left|\Delta_1-\Delta^2\right|-\frac{\left|\Delta^2\right|}{2}\right)+\frac{\left|\Delta^2\right|}{2(nq)^2}x\right]x$$

從而可求得 $f(x)$：

由表 9 中的數據，可得平、立、定三差之值：

$$定差=F(nq)+\left|\Delta_1-\Delta^2\right|=513.382\,210$$

$$平差=\frac{1}{nq}\left(\left|\Delta_1-\Delta^2\right|-\frac{\left|\Delta^2\right|}{2}\right)=2.455\,386$$

$$立差=\frac{\left|\Delta^2\right|}{2(nq)^2}=0.003\,143$$

所求函數爲：

$$F(x)=513.382\,210-2.455\,386x-0.003\,143x^2$$

$$f(x)=xF(x)=513.382\,210x-2.455\,386x^2-0.003\,143x^3$$

所以，定、平、立三差分別是函數 f 的一次、二次、和三次項係數。

若用牛頓的差分公式，則：

$$F(nq)=F(0)+n\Delta F[0]+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2F(0)$$

由表 9 中得　$\Delta^2F(0)=-1.380\,167$，則

$$\Delta F(0)=\Delta F(1)-\Delta^2F(0)$$
$$=-38.454\,660-(-1.380\,167)=-37.074\,493$$
$$F(0)=F(1)-\Delta F(0)$$
$$=476.307\,717-(-37.074\,493)=513.382\,210$$

所以

$$F(m)=513.382\,210-37.074\,493\frac{m}{q}-1.380\,167\frac{m}{2q}\left(\frac{m}{q}-1\right)$$

$$f(m)=mF(m)=513.382\,2m-2.455\,4m^2-0.00314m^3$$

即《授時曆》裏推算的公式。除了用公式計算外，還可以逆轉上述的步驟，亦可求出冬至後每天的盈縮差。

令　$a=513.382\,210$

$b=-2.455\,386$

$c=-0.003143$

則上式可寫為：$f(x) = ax + bx^2 + cx^3$，將 $x = 1, 2, 3, \cdots$ 代入並列表：

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0				
1	a + b + c			
		a + 3b + 7c		
2	2a + 4b + 8c		2b + 12c	
		a + 5b + 19c		6c
3	3a + 9b +27c		2b + 18c	
		a + 7b + 37c		6c
4	4a + 16b + 64c		2b + 24c	
		a + 9b + 61c		
5	5a + 25b + 125c			

表 11　　三次函數差分表

由表 10 及 a, b, c 的數值，得

$$\Delta^3 f(0) = 6c = -0.018\,858$$

$$\Delta^2 f(0) = \Delta^2 f(1) - \Delta^3 f(0) = 2b + 12c - 6c = 2b + 6c$$
$$= -4.929\,630$$

$$\Delta f(0) = \Delta f(1) - \Delta^2 f(0) = a + 3b + 7c - (2b + 6c)$$
$$= a + b + c = 510.923\,681$$

在《授時曆》中，$\Delta f(0)$，$\Delta^2 f(0)$，和 $\Delta^3 f(0)$ 分別稱為加分，平立合差，和加分立差。有了這些參數，便可將每天的盈縮差表重建，並可以此求出冬至後第 x 天太陽的日躔盈縮差的數值。讀者有興趣的話，可以試一試把這個表重建起來。

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	0			
		510.923 681		
1	?		-4.929 630	
		?		0.018 858
2	?		?	
		?		0.018 858
3	?		?	

表 12　　《授时曆》日躔度重建表

雖然《授時曆》的日躔表中給出了有關盈縮差的觀測數據，而且在表 9 中 $\Delta^3 F(nl)$ 都等於零，但我們有理由相信這些數據是通過微調的。

上述的上元積年，大衍總術，演紀術，實數的連分數展開與漸近分數演算法，調日法，二次差內插法，定平立三差術等，只是曆法計算中主要數學依據；此外，還有很多不同演算的應用未在這裏一一論述，有興趣的讀者可參考其他學術性的著作。

---

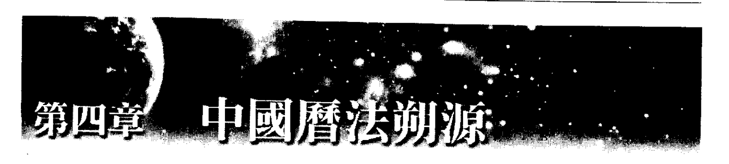
① 注：詳見曲安京《中國曆法與數學》（科學出版社）第四章第二節「調日法」中的「調日法本術試探」。

② 注：有關「除法」、「乘法」的定義，見下文「內插法」中「等間距二次差內插法」。

③ 注：詳見曲安京《中國曆法與數學》（科學出版社）第四章第三節表 4－10「宋代曆法之乘法與除法分析」。

④ 注：《皇極曆》中紀法為 46 644，日法為 1 242，閏章為 $(8\,361, 676)$ 即 $(p,q)=(8\,361, 676)$，若朔餘的數值為 658，則回歸年為 $365\frac{10942}{46644}=365.234\,585$ 日，平氣為 15.218 108 日左右，則平氣的漸近分數系列為 $\left[\frac{15}{1},\frac{61}{4},\frac{76}{5},\frac{137}{9},\frac{350}{23},\cdots\right]$ 或〔15; 4, 1, 1, 2, 2, 4, 22, 1〕。文中乘法 11 的來由，不明所以。

⑤ 注：中國曆法在《授時曆》開始取消了上元積年，而以「日周」作為基本分母，日周 = 10 000。日周的開始象徵著小數位應用的開始。



歲星紀年

前面已經提到過，古人把歲星（即木星）的週期按十二年算，從而把黃、赤道帶的周天分爲十二次，歲星每年行經一「次」，如「歲在鶉火」，就是某年歲星到達了「鶉火」這一星次中，但木星繞日公轉的週期是 11.86 年，若干年以後，誤差會很大，有所謂「歲星超次（辰）」，最後，曆法家在東漢《四分曆》及以後就只好放棄使用歲星紀年，改用干支紀年。

既然歲星紀年已經停用了，爲什麼我們還要獨立說明呢？主要的原因有兩個：一、能夠明白古籍中以歲星紀年記載事項的年代背景，二、從歲星紀年所衍生出來的假想天體 —— 太歲。

歲星沿著黃、赤道自西向東運行，每年停經一星次。十二辰的劃分和十二次是方向相反的，古時星占家就設想有一假想天體，像歲星一樣，沿著十二辰自東向西每年停經一辰，這個假想天體被稱爲太歲星，而且還把太歲所在的年分別稱爲困敦（子）、赤奮若（丑）、攝提格（寅）、單閼（卯）、執徐（辰）、大荒落（巳）、敦牂（午）、協洽（未）、涒灘（申）、作噩（酉）、閹茂（戌）、大淵獻（亥）。《漢書．律曆志》有這樣的記載：漢高祖元年「**歲在大棣（鶉首），名曰敦牂，太歲在午**」。可見古時亦有用歲星和太歲來記載年代。這段記載表示（如圖 12 所示）歲星在鶉首，即十二辰中的「未」辰，而太歲則在「午」辰，同時亦引伸出下面的疑問：

一、 十二次是否真的像明末的翻譯一樣，與黃道十二宮相對應，且起迄點在中氣，和十二辰錯開 15°？而歲星與太歲在漢高祖元年（或往後每十二年）剛好落在這個空間？

二、 又或者是十二次是以二十八宿相對應，由於二十八宿間度數不等，因而十二次間的距離也是不等？要是這樣的話，那又是什麼原因把十二次從不等分變爲等分呢？

筆者比較傾向第二個說法，但這些問題最好是留給古天文學者去探索了。

要是用干支紀年的話，會比較簡單，如子年太歲在子、午年太歲在午等。堪輿學上往往要找出太歲所在方位，然後去判斷有沒有事物冲尅太歲。「冲」是十二支的隔七相沖，如子午相沖；「尅」是五行的生尅，如子屬水，則不宜土尅；自己就更加不宜在「太歲頭上動土」，意思即是說不宜在太歲方動工，亦即所謂「動太歲」了。子平命理中的流年，也就是太歲，在批斷某人某年的小運時，該年的流年太歲亦要考慮在內。

干支紀年、紀日

干支紀年、紀日似乎是中國曆法中獨特的記錄年、日的一套方法，而且還將地支引用到月、時、甚至方位上。干泛指十天干：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸。支則泛指十二地支：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。《史記．律書》、《漢書．律曆

誌》、《說文解字》等都對十天干、十二地支的含義作出了一些解釋。以《史記・律書》及《漢書・律曆志》爲例：

天干	《史記・律書》	《漢書・律曆志》
甲	萬物剖符，甲而出也	出甲於甲
乙	萬物生軋軋	奮軋於乙
丙	陽道著明	明炳於丙
丁	萬物丁壯	大盛于丁
戊		豐茂於戊
己		理紀於己
庚	陰氣庚萬物	斂更於庚
辛	萬物之辛生	悉新于辛
壬	陽氣化養於下也	懷任於壬
癸	萬物可揆度	陳揆於癸

表 13　《史記・律書》和《漢書・律曆志》中天干的說明

地支	《史記・律書》	《漢書・律曆志》
子	言萬物滋於下	孳萌於子
丑	紐也。言陽氣在上未降，萬物厄紐未敢出	紐牙於丑
寅	言萬物始生，螾然也	引達於寅
卯	言萬物茂也	冒茆於卯
辰	言萬物之蜄也	振美於辰
巳	言萬物之巳盡	巳盛於巳
午	陰陽交，故曰午	咒布於午
未	萬物皆成，有滋味也	味曖於未
申	言陰用事，申則萬物	申堅于申
酉	萬物之老也	留孰於酉
戌	萬物盡滅	畢入戌
亥	該也。陽氣藏與下也	該閡於亥

表 14　《史記・律書》和《漢書・律曆志》中地支的說明

大意是指萬物從萌生、壯大、到消亡、更生的榮枯盛衰的過程。有興趣的讀者，不妨查閱《說文解字》，便會對天干、地支的含意有進一步的理解。

從陰陽五行學說來說，十干中甲、乙爲東方木，丙、丁爲南方火，庚、辛爲西方金，壬、癸爲北方水，戊、己爲中央土；十二支中寅、卯爲東方木，巳、午爲南方火，申、酉爲西方金，亥、子爲北方水，辰、未、戌、丑爲土，寄四時。中國任何一種術數都離不開這種的應用。

雖然說軒轅黃帝「命羲和占日，常儀占月，大橈氏按五行創天干、地支、作六十甲子，蒼頡造文字，容成編撰曆書」，但干支何時開始使用實無可稽查。根據歷史的記載，早在殷周的時代已經使用干支紀日，而且從來沒有中斷過，連古代一些曆法的校正亦以干支紀日的記錄來驗證，所以干支紀日也應該是一個偉大的發明。

何謂干支紀日，就是按上述天干、地支的順序，兩兩排列來命名每一天，六十天一個循環。比方說：甲爲天干之首，子爲地支之首，故以甲子作爲第一天的日名；然後依次以乙丑、丙寅爲第二、三天的日名，到癸亥後又回到甲子。從甲子到癸亥稱爲一個甲子週期（Sexagenary Cycle，排列如下表）。用來命日，稱爲「干支紀日」；用來命年則稱爲「干支紀年」。

0 甲 子	1 乙 丑	2 丙 寅	3 丁 卯	4 戊 辰	5 己 巳	6 庚 午	7 辛 未	8 壬 申	9 癸 酉
10 甲 戌	11 乙 亥	12 丙 子	13 丁 丑	14 戊 寅	15 己 卯	16 庚 辰	17 辛 巳	18 壬 午	19 癸 未
20 甲 申	21 乙 酉	22 丙 戌	23 丁 亥	24 戊 子	25 己 丑	26 庚 寅	27 辛 卯	28 壬 辰	29 癸 巳
30 甲 午	31 乙 未	32 丙 申	33 丁 酉	34 戊 戌	35 己 亥	36 庚 子	37 辛 丑	38 壬 寅	39 癸 卯
40 甲 辰	41 乙 巳	42 丙 午	43 丁 未	44 戊 申	45 己 酉	46 庚 戌	47 辛 亥	48 壬 子	49 癸 丑
50 甲 寅	51 乙 卯	52 丙 辰	53 丁 巳	54 戊 午	55 己 未	56 庚 申	57 辛 酉	58 壬 戌	59 癸 亥

表 15　　六十甲子的干支排列

上表又稱「定日鈐」，鈐是表的意思。表中所示，以甲子日爲 0，古曆法稱爲「命甲子算外」。由於一個甲子以 60 爲週期數，表中的數字可以用下面的餘式公式表示：

$N \equiv n\,(\bmod 60)$，其中 n 为整数和 $0 \le n < 60$ (10)

上式讀爲「N 除以 60，其餘數爲 n」。式中 N 爲當日到已知甲子日的累積數（連甲子日則稱爲「算盡」），60 爲模數。n 亦即是表 13 中的數，當日的干支日名可以從上表查出。上表甲子從 0 開始，也有甲子從 1 開始。這視乎個人的習慣，當然，算式上是須要一定的修改。

舉例說明：2005 年 2 月 9 日即乙酉年正月初一爲甲子日，同年的 7 月 18 日與 2 月 9 日相距 159 日，算外，即

$$159 \equiv n\,(\bmod 60)$$

或 $$159 = n + 60m = 39 + 60 \times 2$$

其中 m 爲商數（Quotient），n 爲餘數（Remainder）。

按上表，餘數 39 即癸卯，可知 2005 年 7 月 18 日爲癸卯日，算外。

要將這六十個順序記憶下來恐怕也不容易，讀者不妨考慮下面的辦法：

設數集（Set）A 和數集 B 分別等於：

$$A = \{甲, 乙, 丙, 丁, 戊, 己, 庚, 辛, 壬, 癸\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

和 $$B = \{子, 丑, 寅, 卯, 辰, 巳, 午, 未, 申, 酉, 戌, 亥\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

則 $$N \equiv n_1 (\bmod 10) \quad (11\text{-}1)$$

其中 n_1 爲整數，$0 \le n_1 < 10$ 和 $n_1 \in A$

$$N \equiv n_2 (\bmod 12) \quad (11\text{-}2)$$

其中 n_2 爲整數，$0 \le n_2 < 12$ 和 $n_2 \in B$

按上例，$159 \equiv n_1 (\bmod 10)$ 和 $159 \equiv n_2 (\bmod 12)$，解之得：

$n_1 = 9 =$ 癸和 $n_2 = 3 =$ 卯

同樣可以得到該日的日名爲癸卯日。年的干支名亦可用同樣的辦法來推算。

假如不是「命甲子算外」，比方說「命己亥算外」，則需要將式 (9) 稍作修改如下：$N \equiv n - r\,(\bmod 60)$，其中 $r = 35$，即六十甲子中己亥的數。這個公式的意思是「用

N除以 60，其餘數為 $n - r$」。又或者是 $N \equiv n_1 - r_1 \pmod{10}$ 和 $N \equiv n_2 - r_2 \pmod{12}$，其中 $r_1 = 5$ 和 $r_2 = 11$ 分別是數集 A 中的「己」和數集 B 中的「亥」。

古曆法中常見的天文常數

在閱讀古籍時，阻力往往是由於有太多不統一的名詞（Terminology），而且這些名詞又跟現代的語言格格不入，增加閱讀的困難。現在讓我們先熟識一下古曆法中有關的名詞。古曆法中的「法」，一般是指分母（Denominator）；「分」，則多指分子（Numerator）。有時「法」亦用作表示分子，如月法，但不多見。中國的天文常數都是用分數來表達。以祖沖之的《大明曆》為例，得以下的天文常數：

上元甲子至宋大明七年（463CE）癸卯

$N_{463} = 51\,939$，算外

元法	592 365	沒分	3 605 951
紀法	39 491	沒法	51 761
章歲	391	周天	14 424 664
章月	4 836	虛分	10 449
章閏	144	行分法	23
閏法	12	小分法	1 717
月法	116 321	通周	726 810
日法	3 939	會周	717 777
餘數	207 044	通法	26 377
歲餘	9 589	差率	39

大明七年實指大明六年的十一月冬至到大明七年的十一月冬至。通過上述的天文常數，我們可以得出下面基本的參數：

$$回歸年 = 365 + 歲餘／紀法 = 365\frac{9\,589}{39\,491}\ 日$$

$$朔望月 = 月法／日法 = \frac{116\,321}{3\,939} = 29\frac{2\,090}{3\,939}\ 日$$

$=29+$朔餘／日法

$$恒星年=周天／紀法=\frac{14\,424\,664}{39\,491}=365\frac{10\,449}{39\,491}日$$

$=365+$虛分／紀法

$$近點月=通周／通法=\frac{726\,810}{26\,377}=27\frac{14\,631}{26\,377}日$$

$$交點月=會周／通法=\frac{717\,777}{26\,377}=27\frac{5\,598}{26\,377}日$$

元法是各個天文常數的共同週期，上列常數中給出一個紀法，即一紀爲:

$$39\,491年=39\,491\times365\frac{9\,589}{39\,491}日=14\,423\,804日$$

$$=\frac{14\,423\,804}{\frac{116\,321}{3\,939}}朔望月=488\,436朔望月$$

基本上解決了回歸年和朔望月共同週期的問題。

明顯地，14 423 804 是 4 的倍數，而不是 60 的倍數，爲了要讓日名週期（60 甲子）也包括在元法中，只要乘上 15 便可以，所以元法＝15 x 紀法＝15 x 39 491＝592 365。

從這個推斷所得的元法看來，連同癸卯上元積年，《大明曆》中所用的元法只考慮了回歸年、朔望月、日名和歲名的共同週期。這樣一來，第三章中上元積年的同餘式組便可簡化爲：

$$\left.\begin{aligned} N_n &\equiv R_0 (\mathrm{mod}\,60) \\ t\,N_n &\equiv r_D (\mathrm{mod}\,60) \\ t\,N_n &\equiv r_M (\mathrm{mod}\,u) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

此外，從《大明曆》的天文參數中還可以得出其他有關的參數，如：

$$回歸年／朔望月=\frac{365\frac{9\,589}{39\,491}}{\frac{116\,321}{3\,939}}=12\frac{144}{391}（朔望月／年）$$

$=12+$章閏／章歲

章月 = 12 × 章歲 + 章閏 = 12 × 391 + 144

= 4 836 朔望月

歲差 = 恒星年 – 回歸年 = （虛分 – 歲餘）／紀法

$$=\frac{10449-9589}{39491}=\frac{860}{39491}$$

$$回歸年 \equiv \frac{餘數}{紀法} (\bmod 60)$$

$$\therefore \quad 餘數 = 5\frac{9\,589}{39\,491} \times 39\,491 = 207\,044$$

餘數的意思是一個回歸年除以 60 後剩下來的時間。從平氣的定義去理解，平氣爲回歸年除以 24，即 15 日多，按一個節氣平均 15 日算，一年的誤差有 $365\frac{9\,589}{39\,491} - 360 = \frac{207\,044}{39\,491} = \frac{餘數}{紀法}$。若把平氣的「餘數部分」累加，滿一日的那一天稱爲沒日，一年有

$$\frac{365\frac{9\,589}{39\,491}}{\frac{207\,044}{39\,491}} = \frac{3\,605\,951}{51\,761}$$ 沒日＝沒分／沒法。

曆法常數中紀法和日法的選擇看起來挺謹慎和蠻有意思的。試將它們分解並用因子來表達如下：

39 491＝101 x 391＝101 x 章歲

39 491＝23 x 1717＝行分法 x 小分法

3 939＝101 x 39＝101 x 差律

有時爲了運算上的方便，需要將一個數用因子表達，如:

$$\frac{a}{39\,491} = \frac{b\frac{c}{1\,717}}{23} = \frac{行分 + \frac{小分}{小分法}}{行分法} \quad 其中\, a, b, c \in N$$

行分、小分、差率的使用，在後面碰到實例的時候再作討論。

上述的天文常數名詞在歷朝的曆法中都會有一些出入。

中國曆法的演變

通過第二章「天文的基本知識」的介紹，相信讀者已經瞭解到中國曆法中的「年」和「日」是跟太陽的不規則運動有關，也就是說基於陽曆系統（Solar System）；但與公曆不一樣，中國曆法中的「月」卻有兩種含義：

一、　基於月亮的朔望，也就是說基於陰曆系統（Lunar System），從這個意義上說，中國的曆法是陰陽曆法（Luni-solar Calendar）；

二、　以節氣爲月首，中氣爲月中；從這個意義上說，是純陽曆，因爲二十四節氣其實是太陽的赤經位置的一個反映。

所以，在編制一部中國曆法時，除了年、日以外，還需要考慮朔望和節氣，並且要配合干支紀法（俗稱甲子曆）。

在使用公曆以前，中國古籍記載中有曆名的曆法超过 100 部之多，但當中行用過的只有 65 部。比如宋朝沈括（1031 – 1095CE）在自己晚年所著的筆記文集《夢溪筆談》中提到過他在 1086CE 所撰寫的《十二氣曆》，主張廢除朔望月而以節氣爲主的純陽曆，本來應該是一個很好的建議，但也許以陰曆爲主的朔望月的概念太根深蒂固，以節氣爲主的曆法一時之間無法令人接受，結果十二氣曆未被採納，沈括也只能在《夢溪筆談》裏緬懷一番。這些曆法雖然沒有行用過，但對以後的曆法的編制，還是有一定的影響。

雖然說行用過的曆法有 65 部之多，但有代表性的不算太多，原因是有比較多的都是沿用制定的演算法，利用當時的觀測作數據的修正而已。當中更有佚失的、有殘缺的，使得完整無缺地保留下來可供研究的就更少。近代的科學史家、數學史家、天文家如朱文鑫（1883 – 1938CE）、李儼（1892 – 1963CE）、錢寶琮（1892 – 1974CE）、陳遵嬀（1901 - ?CE）、魯實先、嚴敦傑（1917 – 1988CE）、吳文俊及曲安京等學者都花了不少的時間去重建這些曆法，希望通過曆法的重建更深入地瞭解到它门背後所包含的歷史意義，以及在天文和數學上的科技水平。

其實，中國古時的天文學家很早就發現地球、月球和太陽運動的不均勻性，但把這些參數都用在曆法上是比較後期的事，所以，中國的曆法從歷史時期來分，大致可以分爲三個時期：

一、　從春秋戰國時代到唐初，曆法上採用的是平氣（Mean Sun）、平朔（Mean Moon）。將一個回歸年等分 24 份，以這個值來推算節氣的方法稱爲

平氣；以朔望月平均值來推算朔的方法稱爲平朔。回歸年均分 24 份後，每一節氣有 15.218 425 日，某一個節氣的時刻加 $n\times 15.218\,425$ 便是該氣節後第n 個節氣的時刻；同理，第$n+1$ 個朔的時刻就是第一個朔的時刻加 $n\times 29.530\,59$ 。閏周的應用是這個時期的特點，由於閏周的關係，致使朔望月（u）和回歸年（t）不是獨立的常數，它們的數學關係是$pu=qt$（p爲章月，q爲章歲）。以 19 年 7 閏來算，朔望月和回歸年共用的週期是 $N_n=19m$ 。按統計，這個時期中，大部分的曆法都是先定日法，通過閏周，再定紀法，可見閏周的重要性。正如嚴敦傑在「上大明曆表」的校譯 [3] 工作中指出：

設　　章歲爲 q，章月爲 p，章閏爲 α

則　　$p=12q+\alpha$　和　$7q-19\alpha=1$

可得　$\begin{cases} q\equiv 11\pmod{19} \\ \alpha\equiv 4\pmod{7} \end{cases}$　或　$\begin{cases} q=11+19n \\ \alpha=4+7n \end{cases}$

那怕是閏周不用 19 年 7 閏，章歲 q 和章閏 α 都離不開這個關係。

二、　從唐初到明末，曆法上採用的是平氣、定朔（True Moon）。定朔就是對平朔加入了太陽和月球不均勻運動所引起的改正值。由於採用定朔的關係，沿用多年的置閏辦法不得不改變。這一改變，導致閏周的廢除；閏周的廢除，亦使得朔望月和回歸年相對而不是絕對的獨立，不是絕對的原因是因爲這個時期曆法中的朔望月和回歸年，大部分都是用同一個分母 —— 日法。何承天的調日法（$H_n^m=\dfrac{26m+9n}{49m+17n}$）就變成了這個時期的一個特點。到了元朝郭守敬《授時曆》開始，上元積年亦被廢除。

三、　清代以後的曆法，甚至現在採用的公曆，都是採用定氣（True Sun）、定朔。若把平氣理解爲一年的 24 個等分，那麼定氣就是太陽在一年中角距離（Angular Distance）的等分。明末以後，中國的曆法技術一蹶不振，連日、月蝕也無法作出準確的預測，隨著西方傳教士到中國傳教，也帶來了

歐洲的天文學和曆法，中國的曆法便一步一步地走向公曆。

第一個時期——春秋戰國時期到唐初

第一時期有代表性的曆法不少，計有：

古六曆　即《黃帝曆》、《顓頊曆》、《夏曆》、《殷曆》、《周曆》、和《魯曆》的合稱；其中以《顓頊曆》的行用時間最長，一直沿用到 104BCE 漢武帝改曆為止。「六古曆」都是以 $t=365\frac{1}{4}$ 日為一回歸年，閏周 $(p,q)=(235,19)$（即 19 年 7 閏），並導出朔望月為 $u=29\frac{499}{940}$ 日，不同的是各曆的上元和歲首不一樣。「六古曆」都已經失傳了，這些數據都是從《漢書・律曆志》、《大唐開元占經》（簡稱《開元占經》）的殘文片語當中推斷出來的。

太初曆　漢武帝太初元年（104BCE）命落下閎這位民間天文學家進宮與鄧平等人共同編制《太初曆》，後來由劉歆改編為《三統曆》。《三統曆》以天正冬至甲子日朔旦，歲星在星紀女宿 6 度，正月為歲首，規定沒有中氣的月份為閏月，並第一次提出交蝕週期（Eclipse Cycle），以 135 朔望月為「朔望之會」，認為期間太陽通過黃白交點 23 次，兩次為一蝕年，朔望月為 $\frac{2392}{81}=29\frac{43}{81}$ 日，閏周仍按十九年七閏算，則回歸年為 $\frac{562\,120}{1\,539}=365\frac{385}{1\,539}$ 日。當時落下閎已經覺得回歸年取值太大，並指出「**後八百年，此曆差一日，當有聖人定之**」，和現在的回歸年來比較，每 125 年就已經相差一天，結果被東漢的李梵、編訢所編制的《四分曆》於 85CE 所取

代。以現代的數據來看，雖然《太初曆》回歸年和朔望月的精度都不高，但在行星的會合週期如水星的 115.87 日跟現在的測量值只是少了 0.01 日；而蝕年（366.66 日）亦只是多了 0.04 日。

20 世紀 70 年末，經李文林、袁向東推算得太初上元丙子到太初元年的上元積年爲： $145N_{-104}=1728q+r$

其中 $N_{-104}=4617p$ ，$135\le r<139$

得最小正整數解爲 $p=31$ ，$q=12010$ ，和 $r=135$ 。

四分曆

東漢景帝元和二年（85CE）命編訢、李梵編制《四分曆》的原因正如落下閎預測一樣，用《續漢書．律曆志》記載的話說：「**自太初元年始用《三統曆》，施行百餘年，曆稍後天、朔先於曆**」，結果要重新觀測冬至點的位置，釐定新曆。經觀測後，重新測定了二十八宿的距度，冬至點亦由牛宿初度移到斗宿 21¼度；但曆法上

則復古，沿用「古六曆」，也沿用了落下閎的交蝕週期（即 135 朔望月有 23 次或 513 年有 1,081 次蝕），只是通過選定新曆元來糾正「後於天」、「先於曆」的情況。

「古六曆」的曆元爲 4 560 年 ①，《三統曆》則爲 4 617 年，若太初元年（104BCE）前一個近距曆元作爲《四分曆》的一個近距曆元，那麼這個近距曆元必定在 161BCE $(4617+104-4560)$，稱爲「後元三年」，對應於《四分曆》來說，它的上元積年亦必定爲 $N_{-161}=4560m$ ，m爲正整數。現代中國數學史家曲安京根據《續漢書．律曆志》中有關河平年間癸巳年（28BCE）交蝕週期的記載，來斷定交蝕週期參與了m最後的選擇 ②，並算得$m=2$，即上元積年 $N_{-161}=9120$ 。《四分曆》上記有「**從上元太歲在庚辰以來，盡熹平三年（即 174CE），歲在甲寅，積九千四百五十五**

歲」，亦證明「後元三元」的選擇是對的。

從技術水平來說，東漢的《四分曆》沒有什麼突破。但由於冬至點宿度的改變，及月球不均勻運動的發現，卻引起後來對歲差和月球遲疾差率的觀測和研究。

乾象曆

《乾象曆》是東漢劉洪所編制，制定的時間大概在 206CE，但一直到 223 – 280CE 才在三國孫吳地區頒行，代替了行用已百餘年的《四分曆》。這部曆法的特點是將回歸年的小數部分降低到 ¼ 以下，並且引入近點月的計算法，提出了定朔的演算法和日、月蝕限的概念。月法為 43,026，日法為 1,457，朔望月＝月法／日法，即可求得朔望月為 $u=\frac{43\,026}{1\,457}=29\frac{773}{1\,457}$ 日；《乾象曆》仍按 19 年 7 閏算，則回歸年為 $t=\frac{p}{q}u=365\frac{145}{589}$ 日；交蝕週期則為 893

個回歸年內有 1 882 次蝕；並將回歸年、朔望月、日名的共同週期稱為乾法，經過簡單的計算，乾法之數值為 1 178 年。估計劉洪為了要承接《四分曆》，應該會選定「後元三年」為上元積年，以保證天正冬至朔旦，19 是乾法和紀法中的一個因子，用最保守的估計，對應《乾象曆》上元來說，「後元三年」的上元積年可設為 $N_{-161}=19m$，然後再通過冬至甲子日和河平癸巳（28BCE）的交蝕週期來推斷 m 的數值。《乾象曆》篇首的說明「**上元己丑以來，至建安十一年**（即 206CE）**丙戌，歲積七千三百七十八年**」，即 $N_{206}=7\,7378$。換言之，和《四分曆》一樣，交蝕週期有參與《乾象曆》上元的計算。

景初曆

《景初曆》又叫《太始曆》和《永初曆》，是三國時期魏明帝景初元年（237CE），由楊偉所編制，他發現到黃白交點在移動，知道交蝕不一定在升（降）交點，於是利用創設的交會差率和

遲疾率[3]，提出日月蝕蝕分和虧起方位的演算法，提高了近點月的計算精度。《景初曆》從景初元年行用，到 451CE結束，共 214 年之久，可以說是中國曆法史上行用得最悠久的曆法之一。

更爲有趣的是《宋書・律曆志》的一段記載：

「魏明帝景初元年，改定歷數，以建丑之月為正月，改其年三月，為孟夏四月。其孟、仲、季月[4]雖與正歲不同，至於郊祀、迎氣、烝嘗、巡狩、搜田、分至啟閉、班宣時令，皆以建寅為正。三年正月，帝崩，復用夏正」[5]。

意思是說曆法以地正丑月爲起點，但行事仍因循人正寅月雨水爲上元之始；景初三年，魏明帝駕崩，又將上元改回以天正子月冬至爲開始。兩年內更改曆元，行政混亂至此，亦屬罕見。

《景初曆》的月法爲 134 630（或朔總），日法爲 4 559，故朔望月 $u = 29\frac{2\,419}{4\,559}$ 日，閏周仍然是 19 年 7 閏，

則回歸年爲 $t = \frac{673\,150}{1\,843} = 365\frac{455}{1\,843}$ 日。紀法 1 843 爲 19 的倍數，所以 1 843 年應該是回歸年和朔望月的共同週期，回歸年中的分子 673 150 只是 10 的倍數，若 1 843 乘以 6 的話，則可以成爲日名、回歸年、朔望月這三個參數的共同週期，所以准曆元爲 11 058 年。雖然《景初曆》制定的時候是 237CE，但楊偉應該是以 219CE作爲上元積年計算，因爲他自己也在《景初曆》的下款上注明「魏黃初元年十一月小，己卯蔀首，己亥歲，十一月己卯朔旦冬至，臣偉上」字樣，所以N_{219} 可以用 $19m$ 來表示，利用十一月小和己卯朔旦這兩個條件[6]，便可推算得$m = 212$，即 $N_{237} = 18 + 19m = 4\,046$ 年。所以，《景初

曆》開首是說明「壬辰元以來，至景初元年丁巳歲，積四千四十六年，算上」。

元始曆

北涼趙歐在412CE 首次打破古章法，不以19年7閏為閏周，目的是希望提高曆法的精度。《元始曆》是以 89 052 為日法，2629 758 為月法，朔望月則為 $29\frac{47\,250}{89\,052} = 29.530\,588\,8$ 日，而以 7 200 為紀法，並以 600 年 221 閏為閏周，即 $(p,q)=(7421,600)=1$，則回歸年為 $365\frac{1\,758}{7\,200}$ 日。在當時而言，不犧牲朔望月精度的前提下，回歸年的精度是提高了，可是跟現代的數值比較，誤差比19年7閏還大，可以說是到了不能忍受的地步。根據《晉書．律曆志》的記載，與《元始曆》同時的有後秦姜岌的《三紀甲子曆》，或簡稱《三紀曆》，行用時間從384CE 到 517CE，該曆的特點是首創以月蝕位置來推算太陽位置。

元嘉曆

《元嘉曆》又名《建元曆》，是南北朝宋何承天（370－447CE）於 443CE編制，並於宋元嘉二十二年（445CE）頒行，一直到 510CE才被著名的《大明曆》所取代，行用時間不長，但它的特點是首創「調日法」（見第三章中的「調日法」）。遺憾的是，現存古籍中都沒有調日法的具體記載，只能從各古曆法當中推斷它是漸近分數計算的一種應用。何承天主張用定朔來推算，強調「當順天以求合，非為合而驗天」⑦，但由於定朔引起「連大」（幾個大月挨在一起），有違舊法，最後還是被逼在《元嘉曆》中仍使用平朔來計算。

何承天還創近距曆元來減少用上元積年所帶來繁瑣的計算，且推算五大行星時設立不同的曆元，簡化計算，有效地把日法、紀法等天文常數控制在一個比較小的範圍。根據觀測，建立朔望月的強、弱率，

分別爲 $\frac{26}{49}$ 和 $\frac{9}{17}$ ，用分數的加成法則，推斷朔望月非整數部分的數值應該能以 $H_n^m = \frac{26m+9n}{49m+17n}$ 表示，而且認爲最符合觀測結果時，$m = 15$ 和 $n = 1$ ，並稱 m 爲強數，n 爲弱數，所以求得朔望月爲 $u = 29\frac{399}{752}$ 日，即日法爲 $A = 752$ 。《元嘉曆》所取的閏周仍回到 19 年 7 閏，所以回歸日爲 $t = 365\frac{150}{608}$ 日。相對現在的數值，朔望月和回歸年的精度都不算高，但何承天所創的調日法，廣爲後世所用。

大明曆

南北朝時期宋孝武帝大明六年，祖冲之上書要求頒佈《大明曆》，但當時受到戴法興的反對而無法行用，反對的原因是祖冲之在曆法計算中引入歲差，而且改變閏周。直至他死後，其兒子祖暅三次上書，

結果在梁武帝天監九年（510CE）頒行，可以說是「以慰老父在天之靈」。

《大明曆》備受關注的原因，是因爲它比較詳細地記載了各天文常數的計算方法，而且各項常數的精度都提高了很多。如日法爲 3 939，月法爲 116 321，則朔望月爲 $29\frac{2\,090}{3\,939} = 29.530\,592$ 日；閏周爲 391 年 144 閏，紀法爲 39 491，回歸年爲 $365\frac{9\,589}{39\,491}$ 日，即 365.242 815 日。通過強 $\frac{5}{9}$ 、和弱率 $\frac{56}{101}$ ，選定了通法 [8]爲 26 377，並以會周爲 717 777 算出了交點月爲 $\frac{717\,777}{26\,377} = 27.212\,230$ 日；改變五星會合週期的演算法，以五星會合週期爲五星率／紀法，測定木率爲 15 753 082，從而推算得木星繞日週期 [9]爲 11.858 528 年。這些計算的結果都比較接近現在的觀測數

據，在當時來說精度提高了很多。《大明曆》的參數中，紀法是基本常數，不輕易改動，所以估計五星率是通過觀測後有選擇性地選取。從上一節「古曆法中常見的天文常數」中，已經肯定地說《大明曆》上元積年的計算中，歲名、日名、回歸年、和朔望月的數值是直接參與的，其他的如恒星年、交點月、近點月、五星會合週期都是通過選擇以附會《大明曆》的上元。

五星會合週期的新定義一直影響到元朝王恂、郭守敬《授時曆》廢除上元積年爲止。

皇極曆

劉焯（544 – 610CE）在隋文帝仁壽四年（604CE）編成了《皇極曆》，第一次引入了等間距二次差內插計算，解決了太陽、月球不均勻運動所帶來的問題，準確地預測日、月蝕的發生。遺憾的是，這一部曆法受到當時太史令袁充等人排斥，沒

有機會行用；但所創的等間距二次差內插法一直爲後世所重視，而且還引出一行僧的不等間距二次差內插法的面世。

第二個時期 —— 唐初到明末

秦始皇統一中國以後，從隋朝至大唐盛世，以至北宋，期間所頒行的曆法都是一個接著一個，如隋張賓的《開皇曆》（584 – 596CE）、張胄玄的《大業曆》（597 – 618CE）、唐傅仁均的《戊寅元曆》（619 - 664CE）、李淳風的《麟德曆》（665 – 728CE）和一行的《大衍曆》等等。這都是和當時的政治穩定、經濟繁榮有關。其中的經典曆法莫如一行所編制的《大衍曆》。

麟德曆

何承天、劉焯等人所提倡的定朔計算沒有辦法在當時實現，反而在唐高宗麟德二年（665CE）所頒行的《麟德曆》中得以發揮。李淳風（602 – 670CE）以《皇極曆》爲依據，於 665CE 編成《麟德曆》，首次廢除了古曆法中的章、蔀、紀、元的計

算，採用定朔來編排曆譜，廢除了閏章，改以實際測量和統計的數據來計算朔望月和回歸年，並用調日法制定朔望月和回歸年的共同日法 $A=49m+17n=1340$，月法爲 39 571，並加入蝕差校正（即視黃白交點與真黃白交點之差）。這些大膽的嘗試，奠定了中國的曆法從平朔走向定朔的階段。

假如上元甲子天正冬至朔旦，歲名、日名、回歸年和朔望月的共同週期的一次同餘式組變爲：

$$\begin{cases} N_n \equiv R_0 (\bmod 60) \\ TN_n \equiv R_D (\bmod 60A) \\ TN_n \equiv R_M (\bmod U) \end{cases}$$

式中 $\frac{T}{A}$ 爲回歸年, $\frac{U}{A}$ 爲朔望月，其中 R_0 爲所求年歲名；R_D 爲所求年冬至時刻到前一甲子日夜半時刻的分數；R_M 爲所求年冬至時刻到十一月朔日時刻的分數。此外《麟德曆》是第一部使用 $(m,n)=(777,716)$ 爲交

蝕週期[10]的曆法。國際上稱 $(m,n)=(777,716)$ 爲紐康週期[11]。奇怪的是，在《麟德曆》以前，歲差在曆法中的運用以有多時，但李淳風並沒有引入歲差。

大衍曆

一行，原名爲張遂（683 – 727CE），年輕時精通《易》理、曆象和五行陰陽等學，著有《滅蠻經》（已佚失），按先天卦的變化而作生氣、天醫、延年、禍害、六煞、五鬼、絕命及伏位，成爲後世「八宅風水」的理論依據。爲了避開武三通的拉攏，出家爲僧，鑽研天文曆法。唐玄宗開元五年（717CE）被迎回到長安，並於開元九年受命主持《大衍曆》的編制工作，開元十五年（727CE）完成初稿，可惜同年圓寂。其後，由繼承者於次年定稿，並於 729CE 年頒行，使用了 32 年。

雖然說，第二個時期的曆法是以定朔、平氣爲準，但《大衍曆》的特點是利用不等

間距二次差內插法，從平氣的觀測數據中計算出太陽的位置（定氣），並據此來編定太陽運動表，將曆法計算推向一個新的高度。除此以外，《大衍曆》的背後有著很多科學上劃時代的貢獻，如正切（Tangent）函數表的建立，大地子午綫的測量，新的天文儀器的構思等，這一切都是跟制定《大衍曆》息息相關的。比方說，「測影驗氣」歷來都是編曆者的一個重要任務。所謂「測影驗氣」，顧名思義就是測量各節氣中正午太陽在地上的投影，從而計算出一年中每天正午時晷（圭表）影的變化，以驗證曆法的準確性，當中就是使用了正切函數表。

崇玄曆

《崇玄曆》是唐代的曆法家邊岡於 893CE 制定並行用，曆時四十五載。按何承天的調日法，選取 13 500 作爲日法，並以 $(m,n)=(777,716)$ 爲交蝕週期。這部曆法出現了很多革命性的演算法，對唐、宋間的曆法都有著深遠的影響。其中如：黃赤道

差演算法，邊岡創用逐次分段拋物（Parabolic，即一元二次函數）內插法；又如晷影演算法（立方相減相乘演算法），是中國歷史上第一個三次多項式函數；又如每日黃道去極度公式，是中國歷史上第一個四次多項式函數；等等。

授時曆

《崇玄曆》以後，唐宋間曾經行用過好幾部曆法，但與元《授時曆》相比，難免失色。《授時曆》可以說是在沒有引入西方天文學以前，代表中國曆法最高峰時期的作品，所用的計算技術比起當時的歐洲先進，而且是中國曆法當中，使用得最悠久的一部曆法（1280 – 1644CE），曆時 364 年，橫跨元、明兩朝。明朝的《大統曆》實際上就是《授時曆》。

王恂（1235 – 1281CE）和郭守敬（1231 – 1316CE）都是受到他們的恩師劉秉忠（元忽必烈的謀臣）的推薦共同主持《授時曆》的編制工作。王恂爲太史令，負責曆

法計算；郭守敬爲同知太史院事，負責儀器製造和觀測。從郭守敬的官職來看，雖有主副之別，王、郭二人惺惺相惜，無分彼此。《授時曆》於至元十三年（1276CE）開始，到至元十七年（1280CE）完成並頒行。王恂主張制曆應「**明曆之理**」，而郭守敬則主張「**曆之本在於測驗，而測驗之器莫如儀表**」，採取理論與實踐相結合。

由於比較多的實際工作都是郭守敬負責，所以後世往往將《授時曆》和郭守敬連在一起。比如，創制多種天文儀器，其中以「簡儀」和「高表」最具代表性，並以此來進行大型的天體、及大地的日影測量，所測得的黃赤交角爲 23˚33'23"，和近代天體力學公式計算出來的 23˚31'58"比較，只差 1'25"；對二十八宿的距度 ⑫重新測量，平均誤差在 5' 內；通過三年多所測得的回歸年爲 365.2425 日，與現在公曆所用的回歸年長度一樣。

在曆法上，則正式廢除了上元積年，取消了以日法爲分母的分數表達方式，改爲百進制，即個位數以下，以 100 爲進位元單位。按《元史》的記載：

「曆法之作，所以步日月之躔離，候氣朔之盈虛，不揆其端，無以測知天道，而與之吻合；然日月之行，遲速不同，氣朔之運，參差不一，昔人立法，必推求往古生數之始，謂之演紀上元。當斯之際，日月五星同度，如合璧連珠然。惟其世代綿遠，馴積其數至億萬，後人厭其布算繁多，互相推考，斷截其數而增損日法，以為得改憲之術，此歷代積年日法所以不能相同者也。然行之未遠，浸復差失，蓋天道自然，豈人為附會所能苟合哉。夫七政運行於天，進退自有常度，苟原始要終，候驗周，則象數昭著，有不容隱者，又何必舍目前簡易之法，而求億萬年宏闊之術哉。

今《授時曆》以至元辛巳年為元，所用之數，一本諸天，秒而分，分而刻，刻而日，皆以百為率，比之他曆積年日法，推演附會，出於人為者，為得自然。」

此外，爲準確地計算日、月、五星的運動，創「定、平、立三差術」，即三次差內插法；用類似球面三角學的「弧矢割圓術」，由太陽黃經來求得太陽的赤經、赤緯，求白赤交角，以及求白赤交點和黃赤交點的距離等。

第三個時期 —— 清代以後

自《授時曆》以後，中國曆法陷入了最低潮的時代。隨著明末鄭和的遠航，中國和歐洲國家的文化交往也增加了；通過耶穌會（Jesuit）傳教士來華傳教，帶來了歐洲的天文知識。中國亦從此展開了完全用定氣、定朔作爲曆法

計算的基礎，可是定氣的引入，有可能在一個月內出現三個節氣。

時憲曆　明崇禎二年（1629CE），由於欽天監五月乙酉朔日食的又一次預測失誤，致使崇禎皇帝决心改曆，遂命徐光啓（嘉靖四十一年生、崇禎六年卒，即 1562 – 1633CE）於北京成立曆局，進行新曆的整編。徐光啓受到早年來華的利瑪竇（Matteo Ricci, 1552 – 1610CE）的誘導，成爲天主教徒，而且從利瑪竇那裏學到了西方天文學和幾何學知識，所以他主張「欲求超勝，必須會通；會通之前，必須翻譯」，耶穌會的鄧玉函（Johannes Schreck, 1576 – 1630CE）、羅雅各(Giacomo Rho, 1592 – 1638CE)、湯若望（Adam Schall, 1592 – 1666CE）等人就這樣前後加入了曆局。遺憾的是曆書未成而徐光啓卻先逝。《崇禎曆書》46 種 137 卷於 1634CE 編成，所涉及的範圍包括：歐洲天文學、計算和測量

的方法、基礎數學、天文表的編算的方法等，但是沒有即時用來編制新的年曆。

1644CE，滿清入關後，湯若望把《崇禎曆書》刪改壓縮成 103 卷，並定名爲《西洋新法曆書》，進呈清政府，因而受到重用，並以此編制民用的年曆，稱爲《時憲曆》，並於 1635CE頒行，到 1723CE止，曆時凡 78 年。在《時憲曆》中，體現了歐洲的天文學、第谷（Tycho Brahe, 1546 – 1601CE）的宇宙體系⑬、幾何學和球面三角學的應用。此後，除了康熙三年到七年（1664 – 1668CE）間的一次排外事件⑭外，清朝欽天監一直都是由洋人主持，直到道光六年（1826CE）爲止。

癸卯元曆

1659CE，南懷仁（Ferdinand Verbiest, 1623 – 1688CE）來華，也參加了欽天監的工作，並於康熙六十一年（1722CE）參與了《曆象考成》的編制工作。《曆象考成》一書是基於湯若望的《西洋新法曆書》而寫成的，其後在乾隆七年（1742CE）編成了《曆象考成後編》10 卷，第一次引入了開普勒第一和第二定律，並以此編制了《癸卯元曆》，一直使用了 169 年，到 1911 年中華民國成立爲止。雖然引入了開普勒定律，但當時還是以地球在橢圓軌道的一個焦點上作爲計算基礎。

茲將歷朝所行用過的曆法列表如下，以供參考。

年代	朝代	曆名	年代	朝代	曆名
	戰國	古六曆			
104BCE - 84	漢	太初曆			
85 – 263	東漢	四分曆			
223 – 280	東漢	乾象曆			
237 – 451	魏	景初曆	384 – 517	後秦	三紀甲子元曆
445 – 509	南北朝・宋	元嘉曆	412 – 439 452 – 522	北涼	元始曆
510 – 589	南北朝・宋	大明曆	523 – 565 540 – 550 551 – 577 566 – 578 579 – 583	北魏 東魏 北齊 北周 北周	正光曆 興和曆 天保曆 天和曆 大象曆
584 – 596	隋	開皇曆			
597 – 618	隋	大業曆			
619 – 664	唐	戊寅元曆			
665 – 728	唐	麟德曆			
729 – 761	唐	大衍曆			
762 – 783	唐	五紀曆	780 – 783	唐	符天曆(行用於民間)

年代	朝代	曆名	年代	朝代	曆名
784 – 806	唐	正元曆			
807 – 821	唐	觀象曆			
822 – 892	唐	宣明曆			
893 – 938	唐	崇玄曆	909 – 911 912 – 925	前蜀 前蜀	永昌曆 正象曆
940 – 950	南唐	中正曆	939 – 943 947 - 994	後晉	調元曆
950 – 975	南唐	齊政曆	956 – 963	後周	欽天曆
964 – 982	宋	應天曆			
983 – 1000	宋	乾元曆	995 – 1125 1123 - 1136	遼	大明曆
1001 – 1023	宋	儀天曆			
1024 – 1064	宋	崇天曆			
1065 – 1067	宋	明天曆			
1068 – 1074	宋	崇天曆			
1075 – 1093	宋	奉天曆			
1094 – 1102	宋	觀元曆			
1103 – 1105	宋	占元曆			
1106 – 1127 1133 – 1135	宋	紀元曆			
1136 – 1167	南宋	統元曆	1137 – 1181	金	大明曆
1168 – 1176	南宋	乾道曆			
1177 – 1190	南宋	淳熙曆	1181 – 1234	金	重修大明曆

年代	朝代	曆名	年代	朝代	曆名
1191 – 1198	南宋	會元曆	1235 – 1280	金	重修大明曆
1199 – 1207	南宋	統天曆			
1208 – 1251	南宋	開禧曆			
1252	南宋	淳祐曆			
1253 – 1270	南宋	會天曆	~1267	元	萬年曆
1271 – 1276	南宋	成天曆			
1277 – 1279	南宋	本天曆			
1280 – 1644	元	授時曆			
1645 – 1723	明	時憲曆			
1742 – 1911	清	癸卯元曆			
1912 –		格里曆			

表 16　　中國歷朝行用過的曆法一覽表

① 注：「古六曆」以 19 年爲章歲，稱爲一章，是時閏餘爲 0；由於《四分曆》回歸年的分母是 4，所以回歸年和朔望月的共同週期是 4 x 19 = 76 年，即〔t, u〕= 76，稱爲一蔀，是時日分爲 0；考慮到日名週期，以一紀等於 20 蔀，即 1 520 年（亦即是 18 800 朔望月或 555 180 日或 9 253 个花甲子）；再把歲名週期加上去，則一元有三紀，即 4 560 年（即 1 520 和 60 的最小公倍数 $\left[1\ 520, 60\right] = 4\ 560$ 。

② 注：即求解 $N_{-28} = 133 + 4\ 560m$ 和 $N_{-28} \equiv r(\bmod 513)$ 。詳見曲安京《中國曆法與書學》（科學出版社）第二章第三節有關東漢四分曆上元積年計算。

③ 交會差與遲疾差：自劉洪《乾象曆》開始，古時天文學家才注意的月球的速度是有快慢。交會差和遲疾差這兩個天文參數是用來修正月球在近點月某一天的實際位置。

④ 孟、仲、季月：孟月是指寅巳申亥等月，仲月是指子卯午酉等月，季月則指辰未戌丑等月。以正月建寅來說，孟夏四月指巳月。古人又稱子月爲天正、丑月爲地正、寅月爲人正。

⑤ 注：《景初曆》開篇語亦謂「此元以天正建子黃鐘之月為曆初，元首之歲夜半甲子朔旦冬至」。其中，黃鐘之月爲子月。按四象、八卦、六律的說法：「周官大師掌六律、六同以合陰陽之聲，黃鐘、大簇、姑洗、蕤賓、夷則、無射，陽聲也；大呂、應鐘、南呂、林鐘、小呂、夾鐘，陰聲也。蓋日月會於十二次而右轉，聖人制六同以象之斗柄，運於十二辰而左旋」。這段說明是陽支以子爲黃鐘、寅爲大簇、辰爲姑洗、午爲蕤賓、申爲夷則、戌爲無射；陰支以丑爲大呂、亥爲應鐘、酉爲南呂、未爲林鐘、巳爲小呂、卯爲夾鐘。

⑥ 注：詳見曲安京《中國曆法與數學》（科學出版社）第四章第三節中的「景初曆上元積年計算」一節。

⑦ 注：見《宋書・律曆志》。

⑧ 注：近點月為 $27\dfrac{5m+56n}{9m+101n}$ 日，當 $m=619$ 和 $n=206$ 時，得

$$27\frac{14\ 631}{26\ 377}=\frac{726\ 810}{26\ 377}$$ 日。

⑨ 注：設 s 為恒星繞日的週期，t 為恒星年，p 為會合週期，則有

$\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{p}$。見嚴敦傑《祖冲之著作校釋》（遼寧教育出版社）。

⑩ 交蝕週期：古代巴比倫人發現日蝕具有 223 個朔望月的週期，從而發現交點月、朔望月和交點年有一個簡單的數學關係。令 l 為交點年數（或稱蝕年），m 為交點月數，n 為朔望月數，則有 m 個交點月 $=n$ 個朔望月 $=l$ 交點年，且其中 $l=m-n$。所以 223 個朔望月有 19 個蝕年，而這個（m, n）=（242, 223）在西方稱為沙羅週期（Saros Cycle）。中國漢代《三統曆》中給出 135 朔望月 23 次個「一會積日」，即（n, l）=（293, 270,）。

⑪ 注：這個數組在西方稱為紐康週期（Newcomb Cycle），以紀念美籍加拿大天文學家紐康（Simon Newcomb, 1835 – 1909CE）。（l, m, n）=（61, 777, 716）。沙羅週期和紐康週期都是漸近分數計算的一種應用：$\dfrac{242x+293y}{223x+270y}=\dfrac{242\times 2+293}{223\times 2+270}=\dfrac{777}{716}$。

⑫ 注：二十八宿的距度歷來都有變化。元《授時曆》測定的距度與漢《三統曆》時就有明顯的差距。《元史・卷五十二・志第四》「周天列宿度」稱：「列宿著於天，為舍二十有八，為度三百六十五有奇。非日躔無以校其度，非列舍無以紀其度，周天之度，因二者以得之」。列表如下：

	東方青龍七宿							
	角	亢	氐	房	心	尾	箕	距度
《授時曆》	12^{10}	9^{20}	16^{30}	5^{60}	6^{50}	19^{10}	10^{40}	79^{20}
《三統曆》	12	9	15	5	5	18	11	75
	北方玄武七宿							
	斗	牛	女	虛	危	室	壁	距度
《授時曆》	25^{20}	7^{20}	11^{35}	8^{95}	15^{40}	17^{10}	8^{60}	93^{80}
《三統曆》	26	8	12	10	17	16	9	98
	西方白虎七宿							
	奎	婁	胃	昴	畢	觜	參	距度
《授時曆》	16^{60}	11^{80}	15^{60}	11^{30}	17^{40}	0^{05}	11^{10}	83^{85}
《三統曆》	16	12	14	11	16	2	9	80
	南方朱雀七宿							
	井	鬼	柳	星	張	翼	軫	距度
《授時曆》	33^{30}	2^{20}	13^{30}	6^{30}	17^{25}	18^{75}	17^{30}	108^{40}
《三統曆》	33	4	15	7	18	18	17	112

上表中的距度是讀成幾度幾分，如井 33^{30} 讀為三十三度三十分。《授時曆》中二十八宿的距度是按周天 365 度 25 分 75（太）算。0.75 分落在北方玄武七宿之中。

⑬ 注：第谷宇宙體系是介乎托勒密的地心體系和哥白尼日心體系之間的宇宙體系。認為地球在宇宙的中心，行星繞太陽運轉，而太陽則率領行星繞地球運轉。這個體系並沒有在歐洲被接納，反而在中國的《時憲曆》中被採用。第谷還遺留下大量的測量數據給他的助手開普勒。

⑭ 注：這次排外事件，可以稱為曆法案件（Calendar Case）。順治（1638 – 1661CE，1644CE 執政）年間，楊光先未能接受欽天監為洋人主管的事實，利用《時憲曆》在 1661CE 的一個計算誤差（39 分鐘的誤差），致使當年十一月中出現三個節氣（其中兩個為中氣），為傳統曆法所不能接受；又誣告湯若望未能依「氣」定立春；編制年歷時只編寫 200 年的年曆，以喻大清的國運；最後，在鰲拜的支持下，以錯選順治一個兒子的葬日以及施咒導致皇太后早薨為理由，於 1644CE 將湯若望、南懷仁等人收監，並於 1645CE 4 月裁定死刑，後來由於天有異象（彗星出現、北京地震、皇宮起火等），疑為冤案，才改判軟禁，但隨從他們的欽天監官員則無一倖免。直至康熙九年（1669CE），欽天監又再失誤，再次起用南懷仁，後來楊光先等人（實則鰲拜的黨羽）則以誣告罪被處死。

第五章　歐洲近代曆法的發展

歐洲近代曆法的發展，比起中國曆法的發展來得簡單。基本上只有兩種曆法：就是 46BCE 的《儒略曆》和接著下來 1582CE 的《格里曆》，後者就是今天的公曆。兩者都是太陽曆，都是以太陽運動為基礎的曆算方法。

儒略曆

在沒有使用《儒略曆》以前，羅馬帝國紀年的方法是以羅馬建城的時間為開始，即所謂的《羅馬公眾曆》（Roman Repulican Calendar），或 a.u.c.（ab urbe condita, 1 a.u.c. 相當於 753BCE）。凱撒大帝長年的東征西伐，勝仗無數，要是問他是哪年的話，恐怕他也無法回答；當他於 48BCE 攻克埃及後，他已經注意到 a.u.c. 曆法已經不能滿足日漸強大的羅馬帝國的統治需要，便命亞歷山大的（Alexandrian）天文學家索西琴尼改革曆法。最後，凱撒

大帝接受了索西琴尼的建議，並於 46BCE（709 a.u.c.）頒行新曆。事實上，索西琴尼所建議的曆法，就是古希臘天文學家阿利斯塔克（Aristarchus）於 239BCE 所提出的曆法，將一個太陽年分 12 個月共 365 日，每 4 年置一閏日，相當於 365.25 日爲一個回歸年，跟現在平均回歸年比較，相差 0.007 8 日。阿利斯塔克原來的設計是每個月 30 天等長，然後把剩下的時間都放在年底。

索西琴尼在設計新曆時，決定在 46BCE 中插入了兩段時間，作爲一次性的修正：一是按習俗於 2 月 23 日後置閏的 23 天，同時爲了要配合當年的分、至點，又於 11 月底到 12 月初之間，增加了兩個月，使得 46BCE 不少於 445 天；同時爲了紀念「偉大的凱撒大帝」，特意將新曆命名爲《儒略曆》，將 7 月命名爲 Julius（July），並將等長變爲大、小月相間，大月 31 天，小月 30 天，多出來的一天便從 2 月份中扣除，置閏的一天又放回 2 月份，所以 2 月份有 29 或 30 天。本來凱撒大帝準備以冬至或春分作爲一年的開始，無奈礙於羅馬議會（Senate）的反對而作出妥協，仍按傳統的 1 月 1 日羅馬議會復會的第一天作爲新一年的開始。

根據一些史料的記載，當時負責執行的曆官將置閏的意思理解錯了，把原來四年一閏理解爲三年加一閏，以致從 43BCE 到 10CE 間爲三年一閏，結果導致 Augustus Caesar（Julius Caesar 的繼承者）命令重整《儒略曆》，並將 4CE 定爲閏年，以後每四年加一閏日，即年數能給 4 整除之年爲閏年（Bissextile，或 Leap Year）；將 8 月以 Augustus Caesar 的名字 Augustus（August）命名，並增加一天，以喻在 Julius Caesar 之後，但具有同樣的豐功偉績；9 月到 12 月則改爲小、大月相間；8 月份多出的一天，又從 2 月份扣除，也許這與 2 月（Februariae, February）作爲淨化月（Februarius Mensis, the Cleansing Month）有關。就這樣變成了今天的日曆：

1 月	January	31 天
2 月	February	28/29 天
3 月	March	31 天
4 月	April	30 天
5 月	May	31 天
6 月	June	30 天
7 月	July	31 天
8 月	August	31 天

9 月	September	30 天
10 月	October	31 天
11 月	November	30 天
12 月	December	31 天

格里曆

由於當時羅馬帝國幅員遼闊，以致《儒略曆》在羅馬帝國之後仍能在很多地方繼續使用，但《儒略曆》的回歸年跟平均回歸年相差 0.007 8 日，即每 128 年相差 1 天，從 46BCE 到 16 世紀，誤差多達兩周，致使羅馬教廷無法確定復活節的日期。當時羅馬天主教（Roman Catholic）教宗保祿三世（Pope Paul III）聘請了耶穌會的天文學家 Christopher Clavius（1537 – 1612CE）來提供改曆的建議，Clavius 基於天文學家和物理學家 Luigi Lilio（卒於 1576CE）的建議，提交了曆改建議。1582CE，當格里歌利十三當選爲新教宗時，採納了 Clavius 的建議，並於 2 月 24 日發出教宗法令（Papal Bull）「Inter Gravissimas」，確立 Clavius 的新曆法，後世稱爲《格里曆》以紀念這位教宗。改革的要點有：

一、　確立公眾假期和工作日，特別是復活節，規定在春分日附近。

二、　改變置閏的辦法。仍按四年一閏的辦法，年數能給 4 整除的年作閏年，但世紀年（Centennial Year）不能給 400 整除的不作閏年算，即非閏年（Common Year）。

三、　置閏規定在 2 月 28 日後。

四、　春分日在 3 月 21 日前後。

五、　法定 1582CE 10 月 4 日（星期四）的第二天爲 1582CE 10 月 15 日（星期五），即在日曆中取消了 10 天。

以上的改革使得 400 年中有 97 個閏年，而平均回歸年的長度從 365.25 日改變爲 $\frac{400\times365+97}{400}=365.242\,5$ 日。教宗法令「Inter Gravissimas」中並沒有提及新年（New Year）的日期，1 月 1 日作爲新年的確定是羅馬天主教教宗 Pope Pius X 在 1910CE 的決定，並於 1911CE 生效。

細心的讀者一定會發現，今天平均的春分年是 365.242 4 日而平均的回歸年是 365.242 2 日，春分年比起當時的回歸年差 0.007 6 日，從 1CE到 1582CE，相差應該是 $0.0076 \times (1582-1) = 12.0156$ 日，那爲什麼《格里曆》只拿走 10 天？原因是 325CE在土耳其（Turkey）Iznik（當時叫 Nicea）開的第一次議會（The First Council of Nicea），其中的一個議題是決定復活節日期的辦法，爲了要從《猶太曆》①中獨立出來，使得復活節能在春分日附近，而 325CE 到 1582CE 之間年的誤差爲 $0.0076 \times (1582-325) = 9.5532$ 日，所以最後以妥协的办法決定拿走 10 天②，讓春分日回到 325CE的時間。

《格里曆》首先在天主教國家及天主教有影響的地區如義大利、葡萄牙、波蘭、西班牙等國家及地區開始使用，很快地整個歐洲都相繼採用。歐洲國家中使用得最晚要算是英國及英屬殖民地（1752CE）、瑞典（1753CE），其後東歐國家、中東國家、亞洲國家都分別於 18 及 19 世紀之間相繼使用。最後，就成爲今天的公曆。在中國，公曆的使用始於 1912CE。

儒略曆與格里曆的換算

歐洲近代曆法的改變發生在 1582CE ，並將當時 10 月 4 日的第二天法定爲新曆的 10 月 15 日，但是由於某些原因，有時還是須要找出 46BCE 以前、又或者是 1582CE 10 月 4 日以後相對的《儒略曆》的日期，《儒略曆》這樣的倒推和延伸，我們稱它爲《預設儒略曆》（Proleptic Julian Calendar）。同樣地，我們有《預設格里曆》（Proleptic Gregorian Calendar）。這樣一來，就需要有這兩種曆法的換算。

《儒略曆》和《格里曆》有相同的地方，也有不同的地方。相同之處是日期還是一天一天的計算；可下面不同的地方卻帶來了換算的複雜性：

一、 從 1582CE 10 月 4 日到 10 月 15 日，中間刪除了 10 天。

二、 置閏的改變使得《格里曆》中不能爲 400 整除的世紀年與《儒略曆》相差少一天，同時也改變了

平均回歸年的長度。《儒略曆》爲 365.25 日，而《格里曆》爲 365.2425 日。

假如要進行換算的話，我們需要有一個參考點和參考數值，在天文曆表（或稱天文曆書 Astronomical Ephemeris）中，一般是採用一個初始曆元和儒略日數（Julian Day Number，或簡稱 JD）。

天文年（Astronomical Year）計年法

我們知道從 1BC 到 AD1（或者是 1BCE 到 1CE）之間是沒有 0 的，對天文曆法家在計算年數時帶來不便，所以天文曆法家將 0 年引入到計算系統中，即：

《格里曆》	天文年數
AD2 = 2CE	= 第 2 年
AD1 = 1CE	= 第 1 年
1BC = 1BCE	= 第 0 年
2BC = 2BCE	= 第 − 1 年
3BC = 3BCE	= 第 − 2 年

換言之，n BC 或 n BCE 被天文曆法家定義爲第 $-(n-1)$ 年。那麼，4713BCE 即是第 $-(4\,713-1)=-4\,712$ 年，當年的 1 月 1 日可寫爲 -4712-01-01；而 2005CE 8 月 12 日則可以寫爲 2005-08-12，即年 – 月 – 日，或 *Y-M-D* 格式。有趣的問題隨之而來，哪究竟千禧年（Millennium Year）是什麼時候開始的呢？答案呼之欲出。

儒略日期（Julian Date）和儒略日數

與中國曆法中的上元積日 ③相似，儒略日數（又稱儒略日次）是從一個既定曆元開始的累積天數。我們在第四章「中國曆法溯源」的「中國曆法的演變」中已經簡單敍述了中國曆法中上元的計算。儒略日*JD*的曆元也可以用類似的計算方法來求得。同樣地，我們須要一些歷史文獻來作出有理的推算。幸好R. L. Reese等人，於 1981CE到 1991CE其間，在美國物理學報（American Journal of Physics），先後發表過三篇有關儒略日曆元的論文 [8]，[9]，[10]，省了我們很多推測的時間。

有很多人認爲儒略日是 Joseph Justus Scaliger（1540 – 1609CE）的發明，說他將求得的三個特殊週期的大週期（Great Cycle）稱爲 Scaliger 週期，或儒略週期（Julian Period）。更有人認爲 Scaliger 稱這個週期爲儒略週期的原因是爲了紀念父親 Julius Scaliger，但他自己在文獻上則寫著「稱爲儒略週期是因爲它與儒略曆吻合」。這三個特殊的週期分別是：

一、 《儒略曆》太陽週期（Solar Cycle），數值爲 28 年，意思是說 28 年後《儒略曆》的某個日期（Date）又回到一個星期的同一天（Day of the Week），用 S 表示。很明顯，28 是 7 的倍數。

二、 默冬章（Metonic Cycle），數值爲 19 年，意思是說 19 年中回歸年（t）的累積天數與朔望月（u）的累積天數是相等的，即 $19t = 235u$ 。19 又稱黃金數（Golden Number），用 G 來表示。

三、 小紀週期（Indiction Cycle），數值爲 15 年，按羅馬帝國的習慣，每 15 年就要點算國家的財產，清點有多少稅收還沒有收回來，慢慢地就變成稅收的小紀週期，用 I 來表示。

由於 28，19，和 15 都沒有公因子，所以儒略週期是這三個數的最小公倍數，即 $[28, 19, 15] = 7\,980$ 年，Scaliger 用（S, G, I）來描述這個週期中的某一年，那麼（1, 1, 1）就是這個週期的第一年，即初始曆元。據Reese等人的論文 [10]，早在十二世紀的文獻中，已經清楚記載著古曆法家如Hereford主教Robert de Losinga已經在 1086CE用 7980 年作爲曆法計算的週期。。

儒略週期有了，但儒略日是從哪一天開始算的呢？根據在羅馬一間天主教修道院的主管 Dionysius Exiguus 神父（～卒於 544CE）權威的推斷，耶穌是在（S, G, I）=（9, 1, 3）這一年出生的，即《儒略曆》的 AD1（或 1CE），假如這一年跟初始曆元的積年爲 N_1 ，則（9, 1, 3）可以通過下列一次同餘式組來求得：

$$\begin{cases} N_1 \equiv 9 \pmod{28} \\ N_1 \equiv 1 \pmod{19} \\ N_1 \equiv 3 \pmod{15} \end{cases}$$

即解 $\begin{cases} N_1 = 9 + 28m_1 & (11-1) \\ N_1 = 1 + 19m_2 & (11-2) \\ N_1 = 3 + 15m_3 & (11-3) \end{cases}$

式中 $m_1, m_2, m_3 > 0$，且 $m_1, m_2, m_3 \in I$

聯立解第一、二式得

$$9 + 28\,m_1 = 1 + 19\,m_2$$

$$19\,m_2 = 8 + 28\,m_1$$

即 $m_2 \equiv 24 \pmod{28}$ 或 $m_2 = 24 + 28\,n$

代入第二式得

$$N_1 = 457 + 19 \times 28n$$

代入第一式得

$$457 + 19 \times 28n = 9 + 28m_1$$

$$28m_1 = 16 \times 28 + 19 \times 28n$$

$$m_1 = 16 + 19n$$

同理可得： $15m_3 = 454 + 532n$

當 $n = 8$ 時，$m_1 = 168$，$m_2 = 248$，和 $m_3 = 314$，則上列同餘式組有解，並求得儒略週期的初始曆元

$N_1 = 4\,713$，即是在 4713BCE。換言之，儒略週期的第一個週期的第一年是在天文年 – 4712 年的 1 月 1 日開始。

為了方便起見，我們用 -4712-01-01 JC（Julian Calendar）來表示。既然一个儒略周期是 7 980 年，那麼第一儒略週期將於 3267-12-31 JC（或 3268-01-22 GC, Gregorian Calendar）結束。

使用這個曆元來計算儒略日的方法一直到 1849CE 才由德裔英國天文學家赫歇耳 John F Herschel（1792 – 1871CE）在《Outlines of Astronomy》（天文學綱要）中提出，加上赫歇耳家族在天文學上顯赫的地位，這個方法為後世天文學界所廣泛接受。《天文學綱要》的中譯本在 1859CE（清咸豐九年）由李善蘭（1811 – 1882CE）和英國偉烈亞力合譯，書名為《談天》。

天文學家以 4713BCE 1 月 1 日（即天文年 -4712-01-01）英國格林威治（Greenwich）平午 [4]（Mean Noon）開始計算，按日遞增，延續不斷，並在小數點後加入當天的時間。這種格式，稱為天文儒略日（Astronomical Julian Day）。比方說，2005CE 8 月 12 日 20^h格林威治平均時間

（Greenwich Mean Time, GMT）的*JD*爲 2 453 595.333 333 日；數值中的小數部分代表從中午 12^h後到 20^h之間的時間距離，即（20 – 12）除以 24。假如時間是從午夜開始計算的話，即 0^h GMT，則*JD* = 2 453 594.500 000 日。所以，*JD* = 2 299 161 就是 1582CE 10 月 15 日 12^h GMT，*JD* – 0.5 相當於當天的零晨。明顯地，一個儒略日包括一晝夜，西方曆法家稱「晝夜」爲Nycthemeron 。英文的Nyct是夜間（of the night）的意思。在曆法的計算上，往往會把這 0.5 天算上，以配合新的一天從 0^h開始，而且亦方便時區 ⑤（Time Zone）的換算。爲了使有別於天文儒略日，我們稱之爲計時儒略日（Chronological Julian Day）。兩者的差別，只是在名稱上而已，代表某一個時間的儒略日數的絕對值實質上是不變的。

由於儒略日的數位太多，增加了計算機（Computer）記憶體（Memory）和儲存硬盤（Hard Disk）的負荷，又或者由於計算器（Calculator）寄存器（Register）的字長（Number of Bytes）不夠而引致計算誤差（Computational Error），天文學家有時會採用改良的儒略日（Modified Julian Day, MJD），而且 *MJD* 定義爲：

$$MJD = \text{JD} - 2\ 400\ 000.5$$

原因有二：經計算，1859-01-01 GC 至 2130-12-31 GC 之間，儒略日數的數值爲 2 400 000 < *JD* < 2 500 000，所以只需要 5 位數便足夠；其次，多減 0.5 天是把時間的起算從中午改爲午夜。

簡單的換算

筆者看過幾個不同的儒略日的換算公式，都是大同小異，不同的地方是它們所選取的參考點不一樣。在這裏，筆者建議下面的一個方法，希望能拋磚引玉。現以 333CE 1 月 27 日（0333-01-27）12^h 的換算爲例。

首先，通過上面儒略週期初始曆元的討論，我們已經得出 1CE 的上元積年爲 $N_1 = 4\ 713$，即 -4712-01-01 12^h 到 0001-01-01 12^h 間的累積年數；又在上元積年的討論中得出：$N_m = N_n + (m - n)$，式中 $m > n$，則 333CE 的上元積年爲：

$$N_Y = N_{333} = N_1 + (Y-1) = 4\,713 + (333-1) = 5\,045$$

《儒略曆》的平均回歸年爲 $t = 365.25$ 日，乘以上元積年，馬上得出上元積日，在民用曆中，天數是整數，所以我們取上元積日的整數部分，即：

$$\lfloor t\,N_{333} \rfloor = \lfloor 365.25 \times 5\,045 \rfloor = \lfloor 1\,842\,686.25 \rfloor = 1\,842\,686$$

意思是說：從 -4712 -01-01 12^h 起到 0333-01-01 0^h 爲止，共有 JD = 1 842 685.5 日，剩下來只須要將月、日算上，就可以得出所求日期的儒略日。例中的月日時爲 1 月 27 日 12^h 即 27.5 日，所以所求日的儒略日數爲：

JD = 1 842 713 日。

例中所舉的月、日比較簡單，假如是 10 月 4 日，恐怕要費一點時間去計算所求年當年第 0 天到所求日期的累積天數。事實上 10 月 4 日的意思是表示一年中已經過了 9 個月，並踏入第 10 個月的第 4 天。爲了避免按月累加，讓我引用Jean Meeus書中計算日期－天數的換算公式 [6]：

當非閏年時：$n_{MD} = \left\lfloor \frac{275M}{9} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{M+9}{12} \right\rfloor - 30 + D$ (13-1)

當閏年時：$n_{MD} = \left\lfloor \frac{275M}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{M+9}{12} \right\rfloor - 30 + D$ (13-2)

式中 M 爲月數，D 爲當月日數，n_{MD} 爲當年到 M 月 D 日的累積天數。把當天時間算上的話，D 可以有小數位。上兩式中的第二項是調整大、小月之用，通過只取整數，可以把第二項控制在 0，2 或 0，1 之間，而第三項減掉 30 是因爲 m 月實際上只過了 m – 1 個月。這樣一來，求儒略日的公式可以寫爲：

$$JD = \lfloor t\,N_Y \rfloor - 0.5 + n_{MD} \qquad (14)$$

從《儒略曆》過度到《格里曆》的過程當中，兩個主要改變的地方是：

一、 置閏的方法是改變了，《格里曆》沒有把不能被 4 整除的世紀年算爲閏年；

二、　1582-10-5 JC = 1582-10-15 GC（或 1582-10-04 JC = 1582-10-14 GC）。

在上一例中，333CE是在 1582-10-15 以前，屬於《儒略曆》，所以不需經過修正就可以求出答案。假如時間是在 1582-10-15 或以後，落在《格里曆》上，則上式需要增加一個修正項，Jean Meeus給出的修正項 [6]為：

$$\Delta = 2 - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor \qquad (15)$$

式中 Y 為年數，則公式 (14) 則變為：

$$JD = \lfloor t\, N_Y \rfloor - 0.5 + n_{MD} + \Delta \qquad (16)$$

比如說，欲求 1957-10-4 $19^h 26^m_. 4$ 的儒略日，用上列公式可得：

$$n_{MD} = \left\lfloor \frac{275\times 10}{9} \right\rfloor - 2\times \left\lfloor \frac{10+9}{12} \right\rfloor - 30 + 4 + \frac{19+\frac{26.4}{60}}{24} = 277.81$$

$$\Delta = 2 - \left\lfloor \frac{1957}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1957}{400} \right\rfloor = -13$$

$$JD = \lfloor 365.25 \times 6\,669 \rfloor - 0.5 + 277.81 - 13 = 2\,436\,116.31$$

通過還原工程（Reverse Engineering）的方法，亦可以從儒略日數的數值計算出《儒略曆》或《格里曆》的日期。例：$JD = 1\,507\,900.13$，求日期。

$$JD = \lfloor t\, N_Y \rfloor - 0.5 + n_{MD} + \Delta$$
$$JD + 0.5 = \lfloor t\, N_Y \rfloor + n_{MD} + \Delta$$

令　$P = JD + 0.5 = 1\,507\,900.13 + 0.5 = 1\,507\,900.63$

∵　$P < 2\,299\,161$，日期應該在 1582-10-15 日之前

∴　$\Delta = 0$

又令

$I = \lfloor P \rfloor = 1\,507\,900$　和　$F = P - \lfloor P \rfloor = 0.63$（當天時間）

$$N_Y = \left\lfloor \frac{I}{t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1\,507\,900}{365.25} \right\rfloor = 4128$$ （所求年上元積年）

所以　$Y = 4\,128 - 4\,713 + 1 = -584$（所求年天文年數）

$$P \equiv n_{MD} (\bmod t)$$

$$n_{MD} = \left\lfloor \left(\frac{P}{t} - \left\lfloor \frac{P}{t} \right\rfloor \right) t \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \left(\frac{1\,507\,900.63}{365.25} - \left\lfloor \frac{1\,507\,900.63}{365.25} \right\rfloor \right) \times 365.25 \right\rfloor$$

$$= 148 = 120 + 28$$

所求日期爲：-0584-05-28 $15^h 7\dot{^m}2$，即 585BCE 5 月 28 日 15 時 7.2 分。

再舉一例，$JD = 2\,418\,781.5$，求日期。

$$JD = \lfloor t\, N_Y \rfloor - 0.5 + n_{MD} + \Delta$$

$$JD + 0.5 = \lfloor t\, N_Y \rfloor + n_{MD} + \Delta$$

令　$P = JD + 0.5 = 2\,418\,781.5 + 0.5 = 2\,418\,782$

∵　$P > 2\,299\,161$，日期應該在 1582-10-15 日之後

∴　$\Delta \neq 0$

又令　$I = \lfloor P \rfloor = 2\,418\,782$　和　$F = P - \lfloor P \rfloor = 0$

$$N_Y = \left\lfloor \frac{I}{t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\,418\,782}{365.25} \right\rfloor = 6\,622$$

所以　$Y = 6\,622 - 4\,713 + 1 = 1\,910$

則　$\Delta = 2 - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor = 2 - 19 + 4 = -13$

$$P \equiv n_{MD} + \Delta (\bmod t)$$

$$n_{MD} + \Delta = \left\lfloor \left(\frac{P}{t} - \left\lfloor \frac{P}{t} \right\rfloor \right) t \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \left(\frac{2\,418\,782}{365.25} - \left\lfloor \frac{2\,418\,782}{365.25} \right\rfloor \right) \times 365.25 \right\rfloor = 96$$

$$n_{MD} = 96 - \Delta = 96 - (-13) = 109 = 90 + 19$$

所求日期爲：1910-04-19 0^h，即 1910CE 4 月 19 日零晨。

上述的演算法，並沒有通過嚴格的驗證，讀者如果發現有錯漏的話，歡迎隨時指正。假如想免除這些繁瑣的計算，下列網站可以提供免費的換算服務：

http://bowie.gsfc.nasa.gov/time/julian.html

http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_timeconv.cfm

無論是《儒略曆》、或是《格里曆》，只要知道兩個日期儒略日的差額，便可知道兩個日期相距的天數。當知道相差的天數，又知道其中一個日期，則另一個日期亦可以求出。再者，儒略日數從來沒有間斷過，1582-10-04 12^h JC 時，$JD = 2\ 299\ 160$，而 1582-10-15 12^h GC 時，$JD = 2\ 299\ 161$，所以兩曆換算的關鍵在於上面 Δ 的數值。舉例，當 2005-08-15 12^h GC 時，

$$\Delta = 2 - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor = 2 - \left\lfloor \frac{2005}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2005}{400} \right\rfloor = -13$$

則《預設儒略曆》的日期為 2005-08-02 12^h JC。當第一個曆元結束的時候，《預設儒略曆》的日期是 3267-12-31 JC，此时 $\Delta = 2 - \left\lfloor \frac{3267}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3267}{400} \right\rfloor = -22$，則《格里曆》的日期為 3268-01-22 GC。

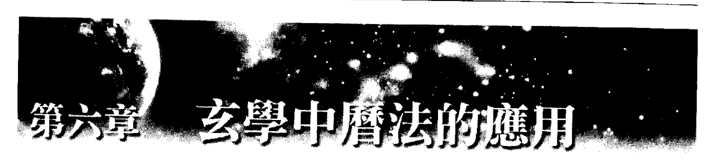
① 《猶太曆》：類似中國的曆法，《猶太曆》是屬於陰陽曆（Luni-solar Calendar），亦是採用 19 年 7 閏的週期，曆元從創世紀（Era of Creation），稱為 AM1（Anno Mundi）相當於《預設儒略曆》的 -3760-10-07，即 3761BCE 10 月 7 日。

② 注：從 325CE 到 1582CE，平均春分年的累积誤差為 9.553 2 日，由於不是整數，所以在刪除多少天的問題上亦有過爭論，最後是用妥協的辦法解決並決定為 10 日；而且，阿拉伯數字的 10 是羅馬數字的 X，羅馬數字的書寫上，只須要在羅馬數字 V（即阿拉伯數字 5）前面加一個 X 就變成 XV（15）。

③ 上元積日：與上元積年 N_n 的定義一樣，只是用日來代替年，以表示跟上元相距的天數；設 t 為平均回歸年的天數，則 $t\ Nn$ 為上元積日。同理，上元積月則用朔望月來代替年；設朔望月的天數為 u，則 $\frac{t\ N_n}{u}$ 為上元積月。

④ 平午：指的是 12^h GMT 世界時（Universal Time, 簡稱 UT）。UT 並非均勻時間，它是以地球的自轉作為依歸的時間計量系統。在天文計算、甚至宇宙飛行中，天文學家必須以一個均勻的時間作為參考標準，因而制定了曆書時（Ephemeris Time, 簡稱 ET）。它跟世界時的關係是：$ET = UT2 + \Delta T$，式中 $UT2$ 是在 UT 初始值 $UT0$ 的基礎上加入了極移改正 $\Delta\lambda$ 和自轉速度季節性變化經驗改正 ΔT_s；而 $\Delta T = 0.41 + 1.205\ 3\ T + 0.499\ 2\ T^2$，式中 T 是 1900.0 後的儒略世紀數。

⑤ 時區：即地方時，以觀測者所在的子午綫爲基準的時間。爲了協調各地的地方時和確定地理經度，習慣上以通過英國格林威治的子午綫爲本初子午綫（Prime Meridian），然後按向東西劃分 180°（或 $\pm12^h$），並以 180°爲國際日期變更綫。北京標準時間（Beijing Standard Time, *BST*）是 120°E 的地方平太陽時間，以北京時間算，香港和北京比格林威治早 8 個小時，即時差爲+8，跟世界時（*UT*）的關係是：$BST = UT +$ 時差。所以，採用計時儒略日的表達有利於時區的計算。



第六章 玄學中曆法的應用

中國的玄學是「上觀天文、下察地理」所衍生出來的另類科學，有人稱玄學爲術數。我想「術數」一詞並沒有低貶的意思，事實上，各種玄學的術也的確跟數有關，連《周易》、《河圖》、和《洛書》都跟數有莫大的關係。中國在計數方面，除了一、二、三、… 等十個數字之外，最具特色的莫如天干和地支在紀年、紀日方面的應用。術數往往會涉及人的生年（所謂命主），甚至出生日期，問事的日期，行事的吉日、吉時等，目的是希望知道某人或某事在某時間的吉凶宜忌。所以，無論是《易》占、梅花《易》數、文王卦，又或是太乙、六壬、奇門遁甲，以致皇極經世、鐵板神算、子平命理（八字）、擇日等，都是和曆有關。在這一章裏，我們重點探索年、月、日、時中天干和地支的推算。

年干支的推算

在前面「干支紀年、紀日」一節中，我們初步討論了天干和地支的六十個組合週期，即甲子週期。我們知道干支紀年、紀日是按著這個週期一個又一個的順序挨排，假如相隔的時間很遠的時候，又沒有萬年曆在手的話，哪不是很費時嗎？所以有須要找出一個快速的方法。最理想的辦法就是先確定一個上元。基於某些原因，有人選取 1CE 的上元積年爲 $N_1 = 2637$ ①，按中國曆法的慣例，歲名應該是甲子，則 2005CE的上元積年爲：

$$N_{2005} = N_1 + (2\,005 - 1) = 2\,637 + (2005 - 1) = 4\,641$$

而 2005CE 的歲名爲：

$$N_{2005} \equiv R_0 \pmod{60}$$
$$R_0 = 21 = \text{乙酉}$$

此外 $C = \left\lfloor \frac{N_{2005}}{60} \right\rfloor = 77$

所以 2005CE 是自上元以來第 78 個甲子週期的第 22 年。由於立春的日期是在公曆的 1 月 1 日之後，這個演算法也只能在立春以後才有效，原因是立春爲一年之始，在立春以前仍然作上一年算。如 2005CE 2 月 4 日丑時前，仍然是甲申年。讀者很快會發現，公曆的 1 月和 2 月在運算上是最複雜的。

假如讀者對甲子週期不感興趣的話，上面的演算法更可以簡化爲：

$$Y - 4 \equiv R_0 \pmod{60}$$
$$R_0 = 21$$

這是因爲 4CE 亦以甲子爲歲名。同樣，當處理公曆 1 月和 2 月時，要小心注意立春的日期，不然的話，推算出來的年干支會相差一個甲子週期排列。

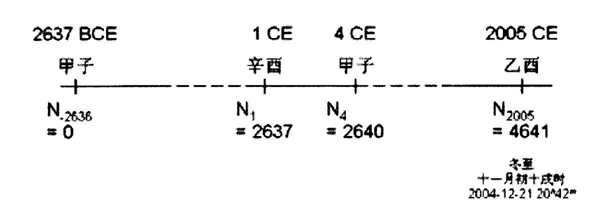


圖 18　　2005CE 歲名與上元積年示意圖

筆者看到過有西方學者用類似儒略週期（S, G, I）的形式來計算中國曆法，並指出中國的紀年、紀日法可以用（C, P, S, D）來表達，其中 C 爲甲子週期數，P 爲該年在甲子週期中的序數，S 爲當天所屬的二十四節氣數（以立春爲 1，雨水爲 2，餘類推），而 D 則爲在該節氣中的第幾天；又或者用（C, P, M, D），式中 M 爲當天所在的朔望月數，則 D 爲該朔望月的第幾天。從概念上來說是可以

的，而且也許是個好辦法，但實際上在中國的曆書當中，筆者沒看到過這種表達或計算方法。

此外，中國民間有用生肖來表達十二支，把它應用在年上可得下表：

地支	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥
生肖	鼠	牛	虎	兔	龍	蛇	馬	羊	猴	雞	狗	豬

表 17　　十二地支與十二生肖對照

假如閣下的出生年支是「午」的話，那麼閣下的生肖屬「馬」。

日干支的推算

日干支的推算相對年干支來說是不太容易的。雖然說早在殷商時代，中國已經用上干支紀日，而且從來沒有間斷過，甚至乎有用干支紀日來檢查曆法。按道理，當推斷出上元，可以用上元積日的辦法來推算出所求日的干支。從第四章「中國曆法朔源」中，我們知道中國曆法的演變

從設閏周到廢除閏周，從設上元到廢除上元，從平氣、平朔發展到定氣、定朔，而且各曆所用的上元和回歸年也不見得完全相同，其中錯綜複雜，有的時候真是說也說不清，所以說，日干支的推算確實是不容易。現在讓我們用幾個已知的參數來探討一下日干支的推算辦法。

假如N_n爲所求年的上元積年，則$t N_n$便是到所求年冬至日的上年積日，其中 t 爲回歸年，所求年冬至日的干支可以通過下式求得：

$$t N_n \equiv r_D (\mathrm{mod}\,60) \qquad (17)$$

在「年干支的推算」一節中，我們提到過上元積年$N_1 = 2\,637$的選取，按道理一個理想上元應該是各個常數的共同起點，這些常數包括歲名、日名、回歸年、朔望月等，所以理論上它是應該從甲子年天正冬至甲子合朔開始，那麼上式中的 r_D 就是所求年冬至與前一個甲子間的時間距離。

雖然我們不知道N_1冬至日的日名是否甲子，但可以利用 2005CE來驗證一下這個上元，按中國曆法的起算，

2005CE是從 2004-12-21 冬至到 2005-12-21，從天文星曆表[7]中，我們有：

SOLSTICES AND EQUINOXES

Year	Equinox Date (UT) d h m	Equinox Time	Solstice Date (UT) d h m	Solstice Time	Equinox Date (UT) d h m	Equinox Time	Solstice Date (UT) d h m	Solstice Time
2004	Mar 20	6:49	Jun 21	0:57	Sep 22	16:30	Dec 21	12:42
2005	Mar 20	12:33	Jun 21	6:46	Sep 22	22:23	Dec 21	18:35

表 18　　2004CE 和 2005CE 的分、至時間（$BST = UT1 + 8$）

表中的時間爲世界時，加上時差便是本地時（Local Time），北京標準時（BST）的時差爲 + 8 小時，所以 2004CE 12 月冬至的時間爲 21 日的 $20^h\ 42^m$ 。又從萬年曆中我們知道 2004-12-21 冬至爲甲戌日戌時，即大餘爲 10，小餘爲$\left(20+\dfrac{42}{60}\right)\div 2$ ②，則

$$r_D = 大餘 + \frac{小餘}{12} = 10\frac{10.35}{12}\ 日$$

而 $$N_{2005} = N_1 + (2\,005 - 1) = 4\,641$$

將數值代入上式得：

$$4\,641\,t \equiv 10\frac{10.35}{12}\pmod{60}$$

上式的 t 無法取得一個合理的解，因爲 t 的值應該在 $365.24 < t \le 365.25$ 之間。

假如 $t = 365.25$，那麼上元冬至有可能不在甲子日，式 (17) 便要改爲：

$$t\,N_n \equiv r_D - a_D \pmod{60} \qquad (18)$$

$$365.25 \times 4\,641 \equiv 10\frac{10.35}{12} - a \pmod{60}$$

解之得：$a_D = 5\frac{7.35}{12}$，即己巳日未時。若以這個上元冬至日來計算 1998 年的冬至日的話，可得：

$$t\,N_{1998} \equiv r_D - 5\frac{7.35}{12}\pmod{60}$$

$$365.25 \times 4\,634 \equiv r_D - 5\frac{7.35}{12}\pmod{60}$$

$$\therefore\quad r_D = 34\frac{1.35}{12} = 34.112\,5$$

即 1998CE（1997-12-22 冬至到 1998-12-21）的冬至日爲戊戌日丑時，以古時百刻制來表達，是戊戌日夜半後 11 刻 25 分。萬年曆列出所求年冬至日的日名爲戊戌日寅時（$04^h\,07^m$）。計算結果與天文曆表相差 1 小時 25 分。

冬至日可求，其他日期亦可求，但須要花一點功夫去計算出冬至日到所求日的累積天數。在天文曆表中查得所求年冬至的時間，通過儒略日的計算方法，可計算得所求年冬至到所求日的天數差，那麼所求日的干支便可通過式 (17) 推算。

比如說，求 2005-02-09 月朔的日名，月朔时间为 $6^h\,28^m$。

先求月朔的儒略日數：

$$d_1 = 2005-02-09 \quad 6^h 28^m$$
$$N_{2005} = 4\,713 + (2\,005-1) = 6\,717$$
$$\Delta_1 = 2 - \left\lfloor \frac{2\,005}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2\,005}{400} \right\rfloor = -13$$
$$n_{MD_1} = 40.269$$
$$JD_1 = \lfloor t\,N_{2005} \rfloor - 0.5 + 40.269 - 13$$
$$= 2\,453\,410.769$$

次求該年（實即前一年）冬至的儒略日數：

$$d_2 = 2004-12-21 \quad 4^h 7^m$$
$$N_{2004} = 4\,713 + (2\,004-1) = 6\,716$$
$$\Delta_2 = 2 - \left\lfloor \frac{2004}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2004}{400} \right\rfloor = -13$$
$$n_{MD_2} = 355.172$$
$$JD_2 = \lfloor t\,N_{2004} \rfloor - 0.5 + 355.172 - 13$$
$$= 2\,453\,360.672$$

則 2004-12-21 冬至到 2005-02-09 相差 $\Delta JD = JD_1 - JD_2 = 50.097$ 日。所求日的上元積日變成：

$$N_{2005} = 2\,637 + (2005-1) = 4\,641$$
$$t\,N_{2005} + 50.097 \equiv r_D - 5\frac{7.35}{12} (\bmod 60)$$
$$r_D = 0.959\,5$$
$$\lfloor r_D \rfloor = 0$$

即 2005-02-09 的日名為甲子日，與萬年曆同，但時間為 $\frac{11.514}{12}$，即亥時。計算結果雖然在同一天上，但時間相差則比較大。這是由於所選取的回歸年為 365.25 日，誤差會隨著積年、積日的增加而加大。

很明顯，這個推算法純是為了「探討」，但求給讀者一個概念而已。筆者從《易學大辭典》[12]中找到一條推算日干支的公式，茲列出以供參考：

$$(Y-1)\times 5 + \left\lfloor \frac{Y-1}{4} \right\rfloor + n_{MD} - 1 \equiv r_{MD} \ (\bmod 60) \qquad (19)$$

式中 Y 為公曆年數，n_{MD} 為所求日當年累積天數的整數，r_{MD} 為所求日的甲子數。這個公式並沒有把時間考慮在裏頭，假如時間是不重要的話，這個方法是一個快捷和簡單

的方法，但式中的 Y 並不是任何一個公曆年數，而是 Y 只能在一定的範圍內，比如 $1901 \le Y < 2100$ 。當公曆年數在 1901CE 前、1801CE 前、又或者在 1582CE 10 月 15 日前，則需要在甲子週期的序數中作出相應的調整。筆者沒有仔細的去推算這公式中 Y 的有效範圍。更遺憾的是，書中並沒有說明是如何推導，只好留給讀者去思考一下。

時干支的推算

時的地支是固定的，即以午夜子时起算，按十二支次序順推，但時的天干是隨著日的天干而變化。古人並編了一首歌訣，名爲「五鼠遁日歌」[13]，方便記憶。

甲己還加甲　　乙庚丙作初
丙辛從戊起　　丁壬庚子居
戊癸何方發　　壬子是真途

天干隔五相合 [3]爲「五」，子肖「鼠」，所以叫「五鼠」。假如日的天干爲甲、己的話，則甲配子，乙配丑，

如此類推。若然是乙、庚的話，則丙配子，丁配丑，等等。詳見表 19。

時間	日名天干				
	甲 己	乙 庚	丙 辛	丁 壬	戊 癸
23:00 – 01:00	甲子	丙子	戊子	庚子	壬子
01:00 – 03:00	乙丑	丁丑	己丑	辛丑	癸丑
03:00 – 05:00	丙寅	戊寅	庚寅	壬寅	甲寅
05:00 – 07:00	丁卯	己卯	辛卯	癸卯	乙卯
07:00 – 09:00	戊辰	庚辰	壬辰	甲辰	丙辰
09:00 – 11:00	己巳	辛巳	癸巳	乙巳	丁巳
11:00 – 13:00	庚午	壬午	甲午	丙午	戊午
13:00 – 15:00	辛未	癸未	乙未	丁未	己未
15:00 – 17:00	壬申	甲申	丙申	戊申	庚申
17:00 – 19:00	癸酉	乙酉	丁酉	己酉	辛酉
19:00 – 21:00	甲戌	丙戌	戊戌	庚戌	壬戌
21:00 – 23:00	乙亥	丁亥	己亥	辛亥	癸亥

表 19　　五鼠遁日表

坊間有玄學命理顧問以夜子、早子來區分子時，以夜子 23:00 – 00:00 爲當天晚上，以早子 0:00 – 01:00 爲第二

天的早上。比方說，2005CE 2 月 9 日的日名爲甲子，則 2 月 8 日的日名爲癸亥。按夜子、早子的說法，則 2 月 8 日晚上 23:00 – 0:00 時，日名仍作癸亥，0:00 – 01:00 時，日名才算是甲子，從表 19 馬上可以得知「癸日子時」的干支爲「壬子」，「甲日子時」的干支才是「甲子」。從圖 19 可以見到「壬」水尅丙、丁火，而「甲」木生丙、丁火，從五行生尅的角度來說，兩者的差異很明顯，應用在玄學命理上，差別可以很大。

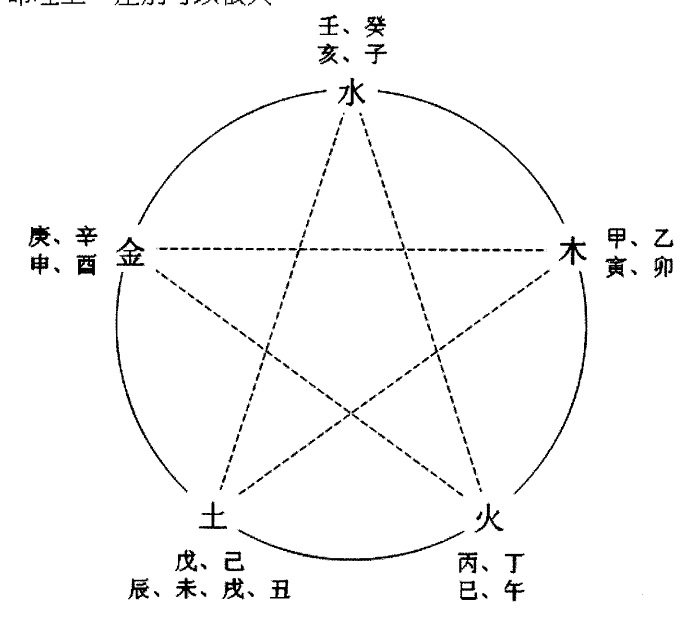


圖 19　五行生尅示意圖

這個劃分無疑是按西方一天的開始來劃分，雖然古時「時辰」也有初、正之分，但並沒有以初、正來決定一天的開始。筆者無緣仰聽箇中道理，也想不出、找不到任何支持夜子、早子說法的科學和哲學論據；然而從《易》經中陰陽消長的概念來說，從各朝曆法的制定中以甲子年天正（子月）冬至甲子合朔（初一日）作爲理想初始曆元來說，從節氣、朔望的交接來說，踏入子時作爲新一天的開始應該是無可置疑的。假如「子正」才算是新一天的開始，那麼乾脆把子時定在 0:00 – 02:00，不就可以減少很多不必要的折騰嗎？天文曆表和萬年曆都是將太陽在赤經 315°的時間定義爲立春，碰上子時，別說是日、就連年的干支不就因爲夜子、早子而變得混亂嗎？

月干支的推算

月干支的推算並沒有一個簡易的計算公式。與時的地支相似，月的地支是根據夏曆按十二辰以子月冬至爲天正，寅月立春爲人初，然後順次挨排如下。中國曆法中的

年和日，是根據太陽運動來定義的，然而中國曆法中的月則有兩個含意：

一、　以陰曆中的朔日作爲一個月的開始，但與氣候寒暑無直接關係，只與月球運動有關；

二、　以二十四節氣中的節爲月首，氣爲月中，與氣候有直接關係，亦即是與太陽運動有關，爲純陽曆。

所以，中國的曆法是陰陽曆的一種。

古籍的記載有以北斗斗柄所指十二辰的方位爲斗建（或月建），斗柄指寅爲斗建寅，指卯爲斗建卯，…，等等；但南北朝的祖沖之有不同的意見，他認爲：「**月位稱建，諒以氣為所本，名隨實著，非謂斗杓所指**」。

月份	斗建	月份	斗建
正月	寅	七月	申
二月	卯	八月	酉
三月	辰	九月	戌
四月	巳	十月	亥
五月	午	十一月	子
六月	未	十二月	丑

月的天干則隨著年干按下面「五虎建元歌」，又稱「五虎遁年歌」，或簡稱「五虎遁」[13]來挨排，如下：

甲己之年丙作首　　乙庚之歲戊爲頭
丙辛之年尋庚上　　丁壬壬位順流行
若言戊癸何方發　　甲寅之上好追求

同樣，天干隔五相合爲「五」，夏曆正月建寅，而寅在十二生肖中屬「虎」，所以叫「五虎」。爲方便讀者查閱，現將五虎遁列表如下：

		節氣		歲名天干				
		節氣	中氣	甲己	乙庚	丙辛	丁壬	戊癸
月干支名稱	正月	立春	雨水	丙寅	戊寅	庚寅	壬寅	甲寅
	二月	驚蟄	春分	丁卯	己卯	辛卯	癸卯	乙卯
	三月	清明	穀雨	戊辰	庚辰	壬辰	甲辰	丙辰

		節氣		歲名天干				
		節氣	中氣	甲己	乙庚	丙辛	丁壬	戊癸
月干支名稱	四月	立夏	小滿	己巳	辛巳	癸巳	乙巳	丁巳
	五月	芒種	夏至	庚午	壬午	甲午	丙午	戊午
	六月	小暑	大暑	辛未	癸未	乙未	丁未	己未
	七月	立秋	處暑	壬申	甲申	丙申	戊申	庚申
	八月	白露	秋分	癸酉	乙酉	丁酉	己酉	辛酉
	九月	寒露	霜降	甲戌	丙戌	戊戌	庚戌	壬戌
	十月	立冬	小雪	乙亥	丁亥	己亥	辛亥	癸亥
	十一月	大雪	冬至	丙子	戊子	庚子	壬子	甲子
	十二月	小寒	大寒	丁丑	己丑	辛丑	癸丑	乙丑

表 20　　五虎遁年表

五虎遁中歲名天干的組合是一個隔五相合的關係，即「甲己合土，乙庚合金，丙辛合水，丁壬合木，戊癸合火」。從五行生尅關係來看，丙屬火，火生土，因爲「甲己合土」，所以甲、己之年以「丙」來配「寅」，故以丙寅爲正月月名；同理，甲屬木，木生火，因爲「戊癸合火」，所以戊、癸之年以「甲」來配「寅」，故以甲寅爲正月月名。同樣，當正月月名爲庚寅，庚金生壬、癸水，所以「丙辛合水」。

其實，當您明白了子月冬至爲天正，則寅月立春爲人初；甲爲十天干之首，則六十甲子中的甲子爲天，乙丑爲地，丙寅爲人，所以甲年從丙寅月開始；甲己合，己年亦從丙寅月開始；則五虎遁就無所遁形了。

月的地支挨排是固定的，而月的天干則隨年的天干而改變，要弄一個從公曆來求朔望月月干支的演算法並不容易，而且意義並不很大。真的要推算的話可以用（假設上元以天正冬至合朔開始）：

$t\,N_n \equiv r_D \pmod{60}$　　　t 爲回歸年，r_D 是當年冬至與前一個甲子的距離

$t\,N_n \equiv r_M(\mathrm{mod}\,u)$ 　　u 爲朔望月，r_M 爲所求年天正朔日與冬至的距離

則 $r_D - r_M$ 是當年天正朔日與前一個甲子的距離。有了第一個朔日，便可推算出它的日名，再按照天文曆表上每個朔日的時間，便可算出所求日落在哪一個朔望月，及相對的日名。

PHASES OF THE MOON

Phase	Date	Time (UT1)	Julian Date
		h m	d
New	1980 Feb 16	8:51	2444285.8687
New	1980 Mar 16	18:56	2444315.2888
New	1980 Apr 15	3:46	2444344.6571
New	1980 May 14	12:00	2444374.0001
New	1980 Jun 12	20:38	2444403.3599
New	1980 Jul 12	6:46	2444432.7817
New	1980 Aug 10	19:09	2444462.2981

表 21　　1980CE 2 月到 8 月的月相時間（$BST = UT1 + 8$）

舉例說明，表 21 所列的是定朔時間，從天文曆表中得 1980CE 2 月 16 日 $8^h\,51^m$ 爲第一個朔日，即陰曆的正月初一日，上表中的時間是 $UT1$，與北京標準時間（BST）相差 8 小時，即 1980CE 第一個朔望月從 2 月 16 日申時

（快接近酉時）開始，則 6 月 8 日落在第四個朔望月內，即巳月。1980 年爲庚申年，所以第四個朔望月的天干爲辛，即辛巳月。

要是沒有這個天文曆表的話，恐怕要從推算當年冬至日開始，然後把每個朔望月累加，看所求日落在哪個朔望月內，同時還要推算出朔望月中有沒有中氣，以決定是否要加閏月，則難免有一番計算的折騰了。

大月、小月、閏月的決定

現代朔望月的取值是 29.530 59 天，這個數值是平均值，是通過長時間觀測的平均結果，但一個月中的天數必爲整數，如果第一个月是 29 天，剩下的半天多便要劃歸下一個月，因而引起大月、小月的問題；再加上月球的運動是不規則的，瞬間的朔望月（即定朔）是有長短的；且 12 個平朔跟 1 個回歸年（平均 365.242 2 天）相差 10 天多，即每相隔約 2.7 個回歸年年便差 1 個平朔，朔望和節氣的錯開，增加了編制中國年曆的難度。

大月、小月的決定比較直接。從天正冬至甲子合朔並以平均朔望月（即平朔）來說，第一個月是 29 天，稱為小月；剩下的半天多劃歸到下一個月，連同下一個月的 29 天半多，第二個月便有 30 天多，取整數，則為 30 天，稱為大月。餘數又劃歸下一個月，依此類推。以算式說明：

第一個月 29 天，小月　餘：$29.530\,59 - 29 = 0.530\,59$

第二個月 30 天，大月　餘：$0.530\,59 + 29.530\,59 - 30$
$= 0.061\,18$

第三個月 29 天，小月　餘：$0.061\,18 + 29.530\,59 - 29$
$= 0.591\,77$

第四个月 30 天，大月　餘：$0.591\,77 + 29.530\,59 - 30$
$= 0.122\,36$

⋮

所以，從殷、周时期的古六曆、到春秋戰國、到唐初，以平朔推算的曆法都是大、小月相間，並按閏周來調節朔望月和回歸年，使立春與第一個朔日盡可能一致。

然而，自唐代改用定朔編曆以後，閏周取消了，大、小月相間就發生了變化，有時侯會出現所謂「連大」的情況，就是兩個或以上的大月連在一起的情況。有連大自然

也有連小，道理一樣，都是因為月球運動的不規則性。跟很多新生事物一樣，守舊派總是不願意接受定朔所帶來的連大，要不是原來的曆法愈來愈不準確，迫使他們無可奈何地接受定朔，中國的曆法才有機會走向一個新的歷程。下面讓我們以 2033CE 為例來看一看這個問題。

2033CE 1 月 31 日壬午日是正月初一日，從天文曆表中，我們可以得出 2033CE 1 月 31 日以後月相的時間如下表：

PHASES OF THE MOON

Phase	Date	Time (h m)	Julian Date (UT1) (d)	delta d
New	2033 Jan 1	10:17	2463598.9284	
New	2033 Jan 30	22:00	2463628.4164	29.4880
New	2033 Mar 1	8:23	2463657.8495	29.4331
New	2033 Mar 30	17:51	2463687.2441	29.3946
New	2033 Apr 29	2:46	2463716.6153	29.3712
New	2033 May 28	11:36	2463745.9836	29.3683
New	2033 Jun 26	21:07	2463775.3798	29.3962
New	2033 Jul 26	8:12	2463804.8419	29.4621
New	2033 Aug 24	21:40	2463834.4025	29.5606
New	2033 Sep 23	13:40	2463864.0692	29.6667
New	2033 Oct 23	7:28	2463893.8113	29.7421
New	2033 Nov 22	1:39	2463923.5687	29.7574
New	2033 Dec 21	18:46	2463953.2821	29.7134
New	2034 Jan 20	10:01	2463982.9176	29.6355
New	2034 Feb 18	23:10	2464012.4653	29.5477

表 22　2033CE 的月相表（$BST = UT1 + 8$）

從萬年曆得知，2033CE 第一個朔望月是小月，第二個月是大月，而上表中第一及第二個朔望月都小於 29.5 天，按理應該兩個月都是小月，第二個月出現大月，那肯定是以前朔望月的盈餘使得第二個月累積達 30 天的原因。讓我們假定這個盈餘等於或大於 0.690 0 天，則：

第零月：	小月	0.6900 + 29.4880 – 30 = 0.1780
第一月：	小月	0.1780 + 29.4331 – 29 = 0.6111
第二月：	大月	0.6111 + 29.3946 – 30 = 0.0057
第三月：	小月	0.0057 + 29.3712 – 29 = 0.3769
第四月：	小月	0.3769 + 29.3683 – 29 = 0.7452
第五月：	大月	0.7452 + 29.3962 – 30 = 0.1414
第六月：	小月	0.1414 + 29.4621 – 29 = 0.6035
第七月：	大月	0.6035 + 29.5606 – 30 = 0.1641
第八月：	小月	0.1641 + 29.6667 – 29 = 0.8308
第九月：	大月	0.8308 + 29.7421 – 30 = 0.5729
第十月：	大月	0.5729 + 29.7574 – 30 = 0.3303
第十一月：	大月	0.3303 + 29.7134 – 30 = 0.0437
第十二月：	小月	0.0437 + 29.6355 – 29 = 0.6792
第十三月：	大月	0.6792 + 29.5477 – 30 = 0.2269

明顯地，第三、四個月都是小月，從第九個朔望月開始出現了連續三個大月。

2033CE 是特殊的一年，它不單只出現「連大」（三個大月）、「連小」（兩個小月），而且在第八個月中沒有出現中氣（秋分），按閏月的規定，沒有中氣的月份爲上一個月的閏月，則第八個月應該是閏七月，但曆法家作了一個例外的決定，不把這個月作閏月處理，反而按八月（辛酉）算，因爲在接著下來的十一月中出現三個節氣（小雪、大雪、冬至），其中兩個是中氣，等同於把八月的中氣補回來。更引人入勝的是，同年的第十二個月又沒有中氣（小寒），而第十三個月又出現三個節氣（大寒、立春、雨水），同樣其中兩個是中氣，但曆法家卻沒有把這個月作例外處理，所以第十二個月爲閏十一月，月名仍用十一月的月名甲子。爲什麼上一個可以例外，而這個又不能呢？

在回答這個問題前，讓我們先看一看下面的一些曆法的規定。

一、　沒有中氣的月爲閏月；但假如在這個月的附近出現一個有三個節氣的月份時，則不作閏月算，有人稱這個月爲假閏月（Fake Leap Month）。這只是一般的稱呼而已，用以區分真閏月。

二、　冬至日必須在陰曆的十一月。

三、　正月和十二月不置閏月。

知道了這些規定後，讓我們回過頭來看 2033CE 的第十二個月爲什麼必須作閏月處理：一、是年冬至在十一月卅日，冬至與立春一般相距 45 天多，假如第十二個月不作閏月處理，則立春會在正月中旬之後；二、第十三個月接著下來的一個月又沒有中氣（春分），而正月不能置閏。基於這兩個理由，我們必須將第十二個月置閏，則第十三個月便可成爲十二月。置閏的目的是爲了調整朔望月和節氣間的合理距離，使得立春不會與正月初一日相差太遠；同時，置閏後第二年正月就沒有置閏的壓力，又不會違反正月不置閏的規定。

2033CE 另外一個特殊的地方，是一個陰曆年內有出現了兩個立春，（2033CE 2 月 3 日和 2034CE 2 月 4 日）即俗稱的雙春。雙春的出現，全年陰曆朔望月的總天數必

須是超過 367 天。民間有所謂「雙春兼閏月」，是指在陰曆年內第一個朔日以後體現了二十四節氣的變化，年底又再出現立春，同時年中又出現閏月，一般都說雙春兼閏月是個好兆頭。與雙春相對的是「盲年」，盲年是指該陰曆年中並沒有出現立春，民間一般的說法是不宜嫁娶。

Sun

Apparent Geocentric Positions
True Equinox and Ecliptic of Date

Date	Time (UT1) h m s	Longitude °	Latitude °	Distance AU
2032 Dec 21	07:55:42.0	270.00000	- 0.00027	0.983703171
2033 Jan 05	01:07:52.0	285.00000	- 0.00000	0.983299564
2033 Jan 19	18:32:33.0	300.00000	- 0.00023	0.983918105
2033 Feb 03	12:41:21.0	315.00000	- 0.00006	0.985682507
2033 Feb 18	08:33:34.0	330.00000	- 0.00012	0.988319523
2033 Mar 05	06:32:06.0	345.00000	- 0.00012	0.991825012
2033 Mar 20	07:22:29.0	0.00000	+ 0.00002	0.995813446
2033 Apr 04	11:07:53.0	15.00000	- 0.00019	1.000172638
2033 Apr 19	18:12:53.0	30.00000	+ 0.00011	1.004471904
2033 May 05	04:13:31.0	45.00000	- 0.00020	1.008531368
2033 May 20	17:10:44.0	60.00000	+ 0.00011	1.011975357
2033 Jun 05	08:13:11.5	75.00000	- 0.00011	1.014608604
2033 Jun 21	01:00:53.0	90.00000	+ 0.00001	1.016226066
2033 Jul 06	18:24:42.0	105.00000	+ 0.00007	1.016673674
2033 Jul 22	11:52:34.0	120.00000	- 0.00010	1.015999984
2033 Aug 07	04:15:30.0	135.00000	+ 0.00019	1.014130945
2033 Aug 22	19:01:35.0	150.00000	- 0.00010	1.011369950
2033 Sep 07	07:20:06.0	165.00000	+ 0.00018	1.007725549
2033 Sep 22	16:51:25.0	180.00000	- 0.00000	1.003675987
2033 Oct 07	23:13:41.0	195.00000	+ 0.00008	0.999275056
2033 Oct 23	02:27:22.0	210.00000	+ 0.00011	0.995062658
2033 Nov 07	02:40:50.0	225.00000	- 0.00004	0.991077794
2033 Nov 22	00:15:55.0	240.00000	+ 0.00016	0.987823675
2033 Dec 06	19:44:41.0	255.00000	- 0.00012	0.985264940
2033 Dec 21	13:45:45.0	270.00000	+ 0.00017	0.983805408

表 23　　2033CE 定氣時間表（$BST = UT1 + 8$）

一般有了定氣的時間表和月相的時間表，便可以很輕鬆的編制一個年曆，從而可以檢查當年有沒有閏月。上表

列出的是太陽的赤經位置，與平氣不同，將太陽的軌道等分 24 角距離（Angular Distance）所給出的是定氣。

至此，我們已簡單的討論過年、月、日、時干支的推算辦法，這些辦法都是概念性的辦法，目的是讓我們對曆法有一個初步的認識。現在的曆法必須是通過觀測、推算、建立天文曆表、確立定氣、定朔再反復觀測驗證，才能編制一本好的年曆。

子平命理

「子平命理」是宋徐子平總結前人論命的理論，直接利用人出生年、月、日、時的天干、地支，並以日名爲命主來判斷人一生、六親、命運的吉凶。有關子平命理的理論著作有《淵海子平》[13]、《三命通會》[15]、《窮通寶鑑》[16]、及《滴天髓》等。

比如說，一個人的出生日期、時辰爲 1980CE 6 月 8 日 16:00，通過上述的介紹，或者是從查閱萬年曆，就可以用天干、地支來紀出這個日期

$N_{1980} \equiv R_0 (\bmod 60)$　　$R_0 =$　庚申　（所求年干支）

按「五虎遁」表：　辛巳　（所求月干支）

$$(Y-1)\times 5+\left\lfloor \frac{Y-1}{4} \right\rfloor + n_{MD} - 1 \equiv r_{MD} (\bmod 60)$$

$r_{MD} =$　壬子　（所求日干支）

按「五鼠遁」表：　戊申　（所求時干支）

並可以寫成：

年柱	月柱	日柱	時柱
偏印	正印		偏官
庚	辛	壬	戊
申	巳	子	申
庚壬戊	庚丙戊	癸	庚壬戊
偏比偏	偏偏偏	劫	偏比偏
印肩官	印財官	財	印肩官

斷曰：孟夏水囚，外實內虛，然四柱庚申金爲水之長生，自坐羊刃，印旺身旺，巳火偏財難當；又戊土偏官無根，尅制不力；重金遍地，甲乙無痕，取用丙戊，冀劫印化晉。偏官純粹，指日可待。乾造少年得志；坤造則難爲子息。忌辰運三合水局，見寅、卯刑空。

古時書寫的習慣是從右到左，所以會將年柱排在右面，然後將月、日、時柱從右到左順序排列。上面年、月、日、時的排列是按現代書寫方式，從左到右。無論從右到左、或從左到右，這種排列的方式叫「四柱」，所以有人稱子平命理爲「四柱論命」，四柱上面沒有任何注明的是日柱，即命主，或稱日主。

四柱的上下有「偏印」、「偏官」等字樣，這些都是四柱中各天干與日主天干的陰陽五行生尅的關係。天干和地支除了按五行分類以外，還分陰陽。

陽干：　甲、丙、戊、庚、壬

陰干：　乙、丁、己、辛、癸

陽支：　子、寅、辰、午、申、戌

陰支：　丑、卯、巳、未、酉、亥

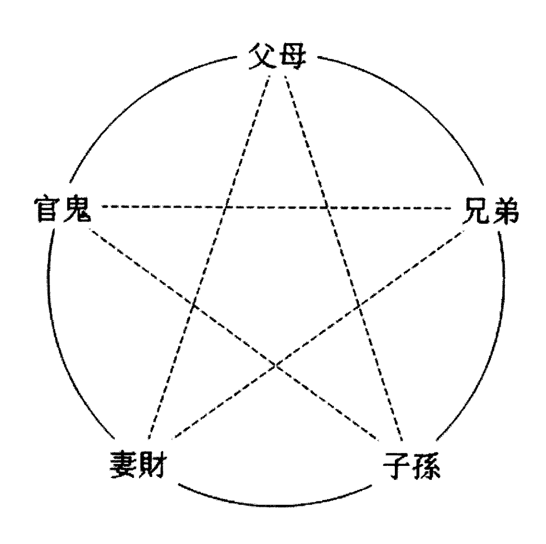


圖 20　　六親生尅圖

兩陽干相遇爲「偏」，一陰一陽爲「正」；生我者爲「印」、爲父母；我生者爲「傷官」（正）、「食神」（偏），爲子孫；尅我者爲「官」，爲官鬼；我尅者爲「財」，爲妻財；同類者爲「劫財」（正）、「比肩」（偏），爲兄弟。上例中，日主天干爲壬，爲陽水，年干庚陽金生壬陽水，所以庚金和壬水的關係是「偏印」的關係，所以在庚上注上偏印；月干辛陰金生壬陽水，所以辛金和壬水的關係是「正印」，所以在辛上注上正印；時干

戊陽土尅壬陽水，所以戊土和壬水的關係是「偏官」的關係，所以在戊上注上偏官。

本來地支和天干是兩類東西，不可能有陰陽五行的較量，但地支和天干又不是絕對無關，由於有「支內藏干」的關係，所以年、月、日、時支又可以跟日干比較陰陽五行生尅。有關支內藏干的關係，筆者不準備在這裏討論，感興趣的讀者可參閱其他有關子平命理的書籍。

上述天干和地支的陰陽五行關係並不是子平命理獨家的理論，在其他術數如風水、《易》占等都用得上。這裏只是隨便一提而已。

有了四柱（或稱八字）以後，便按生年天干的陰陽，日主的乾造（男）、或坤造（女）來定大運、小運，甚至胎元，然後按八字和大、小運以及流年等之間的五行生尅關係來斷運程的吉凶。

前面提到年、月的開始是以節氣來劃分，在節氣之前是前一月或前一年；日則以子時爲分野，子時之前是前一天。根據這個簡單的定義，讓我們看一看下面幾個命例：

一、　公曆 1963 年 1 月 26 日 04:00 a.m. 香港時間

$N_{1963} \equiv R_0 (\mathrm{mod}\,60)$，則 $R_0 = 39 =$ 癸卯（年干支）；1 月 26 日爲陰曆正月初二，按五虎遁，則月干支爲甲寅；若按 $(Y-1)\times 5 + \left\lfloor \frac{Y-1}{4} \right\rfloor + n_{MD} - 1 \equiv r_{MD} (\mathrm{mod}\,60)$，則日干支 $r_{MD} = 5 =$ 己巳；04:00 a.m. 即寅時，按五鼠遁，時干支爲丙寅；那麼所求日的干支不就是癸卯年甲寅月己巳日丙寅時嗎？答案是：錯。

原因是癸卯年的立春節在 2 月 4 日（陰曆正月十一日），從命理的角度來看，1 月 26 日還沒有踏入癸卯年甲寅月，所以此命造不能按癸卯年甲寅月推算，而只能以甲寅的前一個月癸丑算；由於癸丑不在癸卯年上，所以所求的日期的干支應爲：

年干支爲：　壬寅
月干支爲：　癸丑
日干支爲：　己巳
時干支爲：　丙寅

香港在 1979 年前有實施夏令時間（Daylight Saving Time, 俗稱 Summer Time），用意是利用夏天日長夜短的特性來節約能源，在實施夏令時間時，會把時鐘的時針撥快一小時。然所求日是冬日，不受夏令時間影響，不然的話，要先把時間轉爲本地標準時，再求出時干支。

二、　公曆 1979 年 8 月 1 日 11:30 p.m. 香港時間

$N_{1979} \equiv R_0 (\mathrm{mod}\,60)$，則年干支 $R_0 = 55 =$ 己未；公曆 8 月應爲陰曆七月，即申月，按五虎遁，月干支爲壬申；按

$$(Y-1)\times 5 + \left\lfloor \frac{Y-1}{4} \right\rfloor + n_{MD} - 1 \equiv r_{MD} (\mathrm{mod}\,60)$$

則日干支爲 $r_{MD} = 36 =$ 庚子；11:30 p.m. 即子時，踏入子時，應撥入第二天，日干支即爲辛丑，按五鼠遁，時干支爲戊子。那麼所求日干支不就是己未年壬申月辛丑日戊子時嗎？答案是：錯。

雖然所求公曆日期在 2 月 4 日後，按年干支推算公式得己未年；但該年 7 月 24 日（朔日）至 8 月 22

日之間的第七個朔望月只有節氣（立秋）而沒有中氣，故爲閏六月，而非七月，月干支仍按六月干支辛未算；日干支則仍根據庚子來推算；1979年實施夏令時間，夏令時間 11:30 p.m. 即標準時間 10:30 p.m. ，即當天的亥時，仍以庚子日算，按五鼠遁，時干支爲丁亥。所以所求日干支爲：

年干支爲：　己未
月干支爲：　辛未
日干支爲：　庚子
時干支爲：　丁亥

如果沒有天文星表，則朔望、節氣、月之大小、置閏與否皆不可知，要推算此例日期的干支將會比較困難。

此二例綜合了日期干支推算中最容易出現的疏忽，務請讀者注意。

易占

伏羲氏「上觀天文，下察地理」，因而制八卦，分乾☰、坤☷、震☳、巽☴、坎☵、離☲、艮☶、兌☱；一卦有三爻，又按卦爻的變化定乾一、兌二、離三、震四、巽五、坎六、艮七、坤八，是爲先天卦數；將兩卦上下重疊爲重卦，共六爻，並變八卦爲六十四卦。《易》占是通過起卦、裝卦、和斷卦來判斷所求事的吉凶。古時起卦的方法是用傳統的蓍草按《繫辭》[17]的一段描述來起卦，後來發展到用三枚銅錢。到了宋邵康節《梅花易數》[18]，起卦的方法簡直是五花八門，有用物數起卦，有用聲音起卦，有用字的筆劃起卦，有用丈尺起卦；總之，凡跟數有關的，都可以用來起卦。跟曆有關的是將年、月、日、時按一定的規律轉換成卦。轉換的方法是：

年數：　按歲名地支，以子爲 1，丑爲 2，…，等
月數：　按月數，正月爲 1，二月爲 2，…，等
日數：　按日數，初一爲 1，初二爲 2，…，等
時數：　按時辰，子時爲 1，丑時爲 2，…，等

又以年、月、日三數總和除以 8，取餘數，按先天卦數定上卦（或稱外卦）；以年、月、日、時四數總和除以 8，同樣取餘數，按先天卦數定下卦（或稱內卦）；又將年、月、日、時四數的總數除以 6，取餘數，以定變爻，從而定變卦。變爻的意思是將陽爻變爲陰爻，或是將陰爻變爲陽爻。除以 8 是因爲八卦的數目爲 8，除以 6 是因爲重卦的爻數爲 6 的關係。以上節「子平命理」之例爲例，1980CE 6 月 8 日 16:00 爲庚申年四月二十六日申時，則

上卦：　年數 + 月數 + 日數 $= 9+4+26 = 39 \equiv n_U \pmod 8$

下卦：　上卦數 + 時數 $= 39+9 = 48 \equiv n_L \pmod 8$

變爻：　下卦數 $= 39+9 = 48 \equiv m \pmod 6$

即　　$n_U = 7$

　　　$n_L = 0$（即 8）

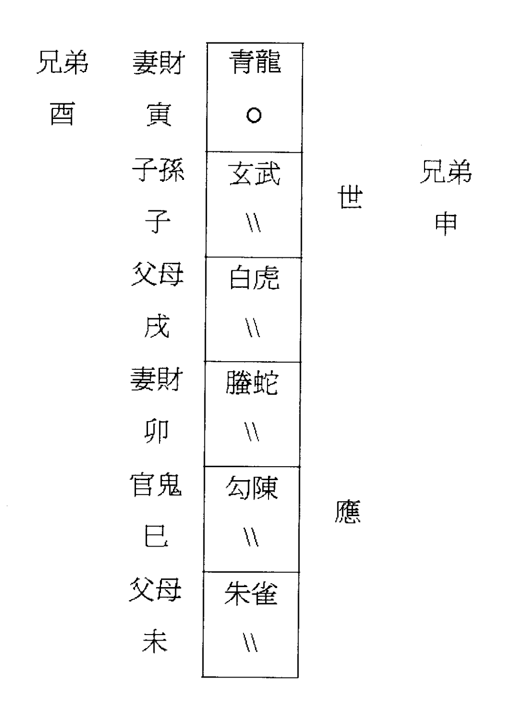
　　　$m = 0$（即 6）

7 爲艮，0 即 8 爲坤，所求卦爲上艮☶下坤☷，卦名爲山地剝，爲本卦，屬乾金宮五世之卦，五爻爲世爻，二爻爲應爻。爻以最下一爻爲初爻，往上爲二爻、三爻、四爻、五爻、上爻。此例 $m = 0$ 即 6，變爻在上爻，即上卦艮☶變爲

坤☷，所以變卦爲上坤下坤，即坤爲地。起了卦，下一步，便是裝卦。

若起卦日是在 2005CE 8 月 21 日，按 $N_{2005} \equiv R_0 \pmod{60}$，則年干支爲 $R_0 = 21 =$ 乙酉；2005 年無閏月，公曆 8 月即申月，月干支爲甲申月；按 $(Y-1)\times 5 + \left\lfloor \frac{Y-1}{4} \right\rfloor + n_{MD} - 1 \equiv r_{MD} \pmod{60}$，則日干支爲丁丑。上例便可裝卦如下。從略。丁日占，朱雀在初爻；世爻位置上的申是伏爻。

乙酉年甲申月甲戌旬丁丑日占



卦裝完了，以世、應、體、用定所求之人或事，然後按卦爻與起卦時的年、月、日、甚至命主五行生尅來斷此卦所代表的人或事的吉凶。

聰明的讀者相信已經注意到起卦時是用陰曆的月和日，並沒有按二十四節氣來決定年、月、日。筆者認爲這個以日期起卦在《易》占中是一個疑案，有術者更煞有介事地說明起卦用陰曆，斷卦占日用的月則按節氣爲依據，但筆者覺得這樣只會帶來混淆，而且也沒有科學與哲學的支持論據，將這個辦法介紹出來，純是爲了給讀者一個以數字起卦的概念而已。筆者所接觸的各門術數中，都是以二十四節氣爲依據，這樣的話，以日期起卦，其中的月、日亦應該以二十四節氣爲依歸。雖然說疑案，但跟其他起卦的方法一樣，首要在心念發動；所以，姑無論上述以日期起卦的方法是否正確，都不損以傳統蓍草、銅錢起卦或其他以數起卦的實用性。

更有以出生日期按上述辦法起卦，稱爲生命卦，然後按卦爻推斷人一生運程的順逆、吉凶。等同八字的應用。近人有以年干代替年支來起生命卦，即甲为 1，乙为 2 等，據說比較準確，筆者認爲只能通過長時間的驗證、實踐，才會有科學的結論。

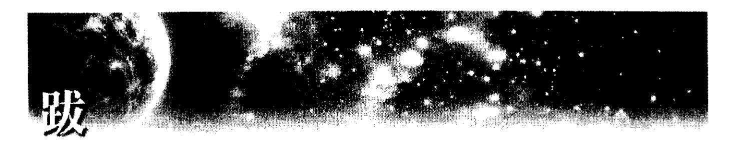
本來也準備將「奇門遁甲」、「六壬神課」、「皇極經世」等跟曆法的關係作一簡單的說明，但礙於篇幅，及有關術數的複雜性，只好先擱置這個想法，希望將來按有關的專題跟讀者再分嘗一下。

---

① 注：有用 $N_1 = 2\,697$ 爲上元，則 2005CE 在上元以來第 79 個甲子週期內，上元冬至可能在癸酉日巳時。

② 注：由於下面時間的表達是以 12（十二時辰）爲分母，所以這裏的小餘除以 $\frac{24}{12}$ 。

③ 注：天干隔五相合，即「甲、己合土，乙、庚合金，丙、辛合水，丁、壬合木，戊、癸合火」，詳見下節「月干支的推算」。天干相合出自《河圖》：天一生水，地六成之；地二生火，天七成之；天三生木，地八成之；地四生金，天九成之；天五生土，地十成之。天干甲數一，乙數二、丙數三，丁數四，戊數五，己數六，庚數七，辛數八，壬數九，癸數十。一六共宗，所以甲己合，二七同道，所以乙庚合，依此類推。



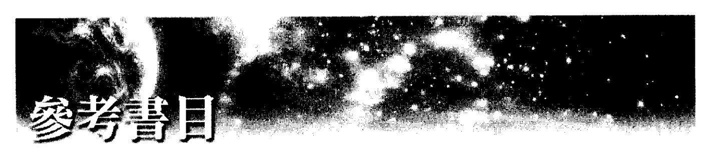
這本書從構思、資料搜集、到書寫、完稿，前後用了一個半月的時間，可算是一氣呵成，至此終於可以鬆一口氣。在定稿的過程中，聚賢館趙善琪先生在這本書的可讀性方面提供了很多很好的意見，謹此致謝。由於是有關曆法的計算，所以書中有比較多的數學演算，筆者已經盡量深入淺出地將這些數學演算方法介紹，務求讀者能看得明白；倘若仍然看不明白，筆者只好謹此致歉。

雖然書中沒有列出一條完整的、可以推算干支紀日的數學公式，但計算的概念已經無遺地作出詳細的介紹。天體的運動是不均勻的，用來描述天體運動的數學模型、公式一直在修正。書中所列的公式，在若干年後，也不見得可以繼續用下去。重要的是要明白曆法的原理，便可受用一生。

期間偶爾跟友好暢論中國曆法，不約而同地得出一個結論：古人也許沒有今人的天文科技知識，但他們的聰明、智慧毫不遜色於今人。想到這裏，不禁有一點汗顏。

曆法不單是天文科技，而且更是一門講求與實踐相結合的綜合學科。希望喜歡研究玄學命理的同道以治曆的態度和精神，將有關的術數提高到新的一個臺階。

2005 年 10 月 6 日於香江



[1] 哥白尼，《天體運行論》，葉式煇譯，陝西人民出版社，武漢出版社，2001 年 1 月第一版。

[2] 中國大百科全書編輯委員會，《中國大百科全書・天文學（乙種本）》，中國大百科全書出版社，1980 年 12 月第一版。

[3] 嚴敦傑，《祖冲之科學著作校譯》，遼寧教育出版社，2000 年 10 月第一版。

[4] 陳己雄，《中國古星圖》，香港太空館編制，香港行政特區康樂及文化事務署出版，2002 年。

[5] 曲安京，《中國曆法與數學》，科學出版社，2005 年 4 月第一版。

[6] Jean Meeus, “Astronomical Formulae for Calculators”, Willmann-Bell, Inc., 4th Edition, 1988.

[7] Astronomical Applications Department, US Naval Observatory, “Multiyear Interactive Computer Almanac 1800 – 2050”, Willmann-Bell, Inc., 1st Edition, 2005.

[8] R. L. Reese, S. M. Everett, & E. D. Craun, “The Origin of the Julian Period: An application of congruences and the Chinese Remainder Theorem”, American Journal of Physics, vol. 49 (1981), 658 – 661.

[9] R. L. Reese, E. D. Craun, & C. W. Mason, “Twelfth-century Origins of the 7980-year Julian Period”, American Journal of Physics, vol. 51 (1983), 73.

[10] R.L. Reese, E. D. Cruan, M. Herrin, "New Evidence concerning the Origin of the Julian Period", American Journal of Physics, vol. 59 (1991), 1043.

[11] Annie Lionnet, "The Astrology Directory", The Ivy Press Limited, 2003.

[12] 張其成主編，《易學大辭典》，華夏出版社，1992 年 2 月第一版。

[13] 宋徐子平編，《淵海子平》，李峰注解，海南出版社，2002 年 2 月第一版。

[14] 中國科學院紫金山天文臺編，《大眾萬年曆（1901－2100）》，1991 年 10 月第一版，1998 年 1 月第三版。

[15] 明萬民英，《三命通會》，王可評注，內蒙古文化出版社，2002 年 6 月第一版。

[16] 李鐵筆，《窮通寶鑑評註》，益群書店股份有限公司，2003 年 2 月第一版。

[17] 馬恒君，《周易正宗》，華夏出版社，2004 年 1 月第一版。

[18] 宋邵雍，《梅花易數》，李一忻點校，九州出版社，2003 年 9 月第一版。

[19] 蓮翰上師（劉易榮），《獨門易卦秘典》上、下冊第二版，佛教密宗香港雷藏寺，1998 年 8 月第一版。

[20] 蓮翰上師（劉易榮），《獨門易卦秘典》續冊，佛教密宗香港雷藏寺，2003 年 8 月第一版。

[21] 中國文化通志編委會，陳美東主編，江曉原、鈕衛星撰《中國文化通志．科學技術第七典．天學志》，上海人民出版社，1998 年 10 月第一版。

[22] Helmer Aslaksen, "The Mathematics of the Chinese Calendar", web page, http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/calendar/chinese.shtml.

[23] L. E. Doggett, "Calendar" in "Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac", P. Kenneth Seidelmann, editor, University Science Books, 1992.

[24] 明宋濂等撰，《元史》，中華書局，1999 年 10 月版。

書　　名：談天説曆
作　　者：趙子澤
出 版 人：趙善琪
編　　輯：賴秀玲
封面設計：陳小蘭

出　　版　：聚賢館文化有限公司
Publisher　：JUXIAN GUAN LTD.
香港柴灣康民街6號金萬豐工業大廈17樓A座
Flat A, 17/F, Kam Man Fung Fty. Bldg.,
6 Hong Man Street, Chai-wan, Hong Kong
Tel:2889 8012　Fax:2515 9239　2541 4462
電子郵箱：juxian @ juxian.com.hk
網址：http://www.juxian.com.hk
印　　刷　：雅聯印刷有限公司
Printing　：Allion Printing Co., Ltd.
香港柴灣利眾街35-37號泗興工業大廈10樓
10/F, Sze Hing Ind. Bldg., 35-37 Lee Chung St.,
Chai-wan, Hong Kong
國際書號　：ISBN 978-962-436-571-9

二〇〇六年一月第一版第一次印